

Appunti di Fisica Subnucleare

E. Iacopini

Dipartimento di Fisica, Università di Firenze
e
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Firenze, Italy

December 22, 2008



Libri consigliati da consultare:

- D. Griffiths: Introduction to elementary particles
- W.R. Frazer : Elementary particles
- D.H. Perkins: Introduction to high energy physics
- I.J.R. Aitchinson: Gauge theory in particle physics
- J.D. Bjorken, S.D. Drell : Relativistic quantum mechanics
- J.D. Bjorken, S.D. Drell : Relativistic quantum fields
- S. Weinberg : The Quantum Theory of Fields
- H. Muirhead : The Physics of elementary particles

Contents

1	Introduzione	7
2	Cenni di Teoria Quantistica dei Campi	9
2.1	Introduzione	9
2.1.1	Simmetrie discrete in Meccanica Quantistica	13
2.1.2	La Parità	29
2.1.3	La Coniugazione di Carica	32
2.1.4	La simmetria di inversione temporale	33
2.1.5	L'operatore T^2	41
2.1.6	Il momento di dipolo elettrico, la parità e l'inversione tem- porale	45
2.1.7	Una curiosità: il vettore di Runge-Lenz	52
2.2	La seconda quantizzazione	56
2.2.1	Il campo scalare libero	56
2.2.2	Il campo vettoriale libero	64
2.2.3	Il decadimento del π^0	79
2.2.4	Il campo di Dirac libero	83
2.2.5	Il decadimento del positronio	122
3	Scattering e decadimenti	126
3.1	La matrice S	126
3.2	Proprietà di S sotto CPT	132
3.3	Lo scattering in QFT	135
3.4	Lo spazio delle fasi	146
3.4.1	Lo spazio delle fasi di due particelle	146
3.4.2	Lo spazio delle fasi di tre particelle: il plot di Dalitz	155
3.4.3	Lo spazio delle fasi di n particelle	163
3.5	Applicazione allo scattering (quasi-)elastico	165
3.5.1	Lo spin del pione π^+	174
3.5.2	Lo scattering quasi-elastico $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$	178
3.6	Applicazione a processi di decadimento	189
3.6.1	Il decadimento del pione	189
A	Appendix: Generalità	210
A.1	Le unità di misura	210
A.2	Le notazioni	211
B	Appendix: Cenni di Teoria Classica dei Campi	217
B.1	Le equazioni di Eulero-Lagrange per campi classici	218
B.2	Invarianza in valore	220
B.3	Invarianza in forma	224

B.3.1	Alcuni esempi di lagrangiane	226
B.4	Il teorema di Noëther	229
B.4.1	L'invarianza sotto il gruppo di Poincaré	233
B.4.2	L'invarianza di gauge di prima specie	237
C	Appendix: Le simmetrie C, P e T in Teoria Quantistica dei	
	Campi	240
C.1	Generalità	240
C.2	La Coniugazione di Carica	241
C.3	La Parità	262
C.4	L'inversione temporale	273

*E io stesso ho osservato anche che ogni fatica
e tutta l'abilità messe in un lavoro
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.*

Salomone, Ecclesiaste 4:4

La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il Saggiatore (1623).

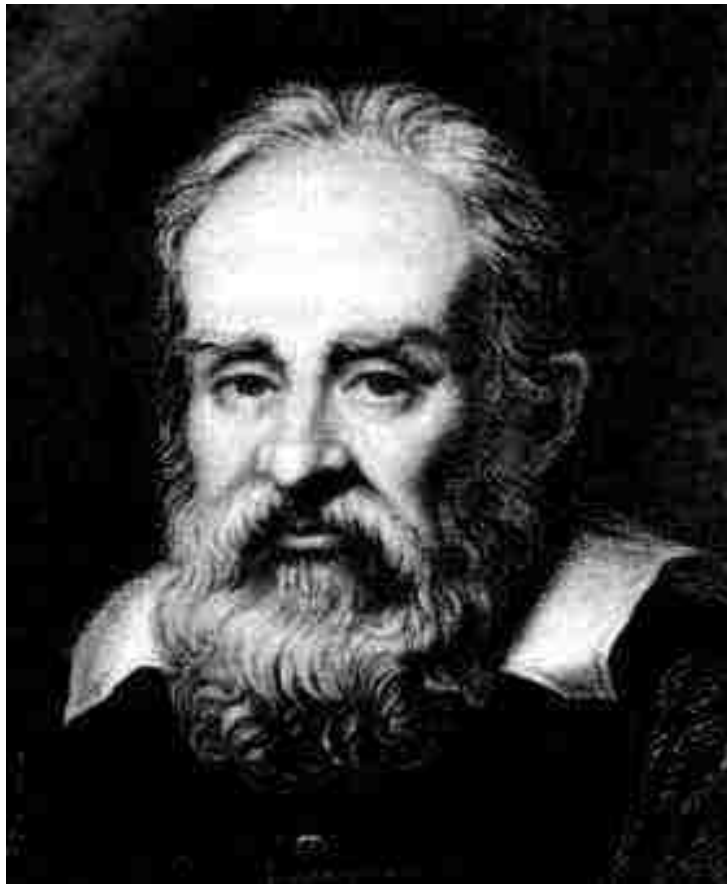


Figure 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*

1 Introduzione

La Fisica subnucleare studia le interazioni fondamentali più rilevanti¹ che esistono fra le particelle elementari².

¹L'interazione gravitazionale è del tutto trascurabile, almeno nel dominio di energie a cui siamo interessati. Si noti, a questo proposito, per esempio, che il rapporto fra l'energia di interazione gravitazionale ed elettromagnetica fra due protoni vale circa 0.8×10^{-38} !

²Ricordiamo a questo proposito che ad una particella elementare dobbiamo richiedere di avere definite almeno due quantità fisiche tipiche, che sono la sua massa m ed il suo spin s . Questa esigenza discende, come è noto, dal fatto che, se lo spazio-tempo è omogeneo (invariante per traslazioni) e vale l'invarianza relativistica, allora lo spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati di una particella deve essere trasformato in sé sotto il gruppo di Poincaré \mathcal{P} (traslazioni in quattro dimensioni e trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono proprio \mathcal{L}_+^\uparrow), i cui elementi agiscono in \mathcal{H} come simmetrie unitarie.

Alla particella elementare viene richiesto di essere tale per cui lo spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati non deve avere sottospazi invarianti (non banali) sotto queste trasformazioni, ovvero di essere caratterizzata dal fatto che la rappresentazione unitaria di \mathcal{P} su \mathcal{H} sia irriducibile.

Queste rappresentazioni, come è stato dimostrato da Wigner, per esempio, in

E. Wigner: *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group*
Ann. Math. 40, 149 (1939)

sono individuate completamente dagli autovalori assunti sullo spazio di Hilbert degli stati del sistema dai due soli operatori di Casimir (costruiti quindi con i generatori del gruppo) indipendenti (almeno nel caso di particelle con massa), i quali commutano con tutti i generatori del gruppo stesso, i.e. gli invarianti

$$P^\mu P_\mu \rightarrow m^2; \quad W^\mu W_\mu \rightarrow -\frac{1}{2} m^2 s(s+1)$$

dove P^μ è l'operatore di quadrimpulso, i.e. l'operatore che genera le traslazioni nello spazio-tempo, mentre il quadrivettore di Pauli-Lubanski $W_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} M^{\nu\sigma} P^\rho$ è legato anche ai generatori $M^{\sigma\rho}$ del gruppo di Lorentz, per cui risulta

$$W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J}; \quad \vec{W} = P_0 \vec{J} - \vec{P} \times \vec{K}$$

essendo i generatori $M^{\sigma\rho}$ definiti implicitamente dalla consueta parametrizzazione della generica trasformazione di Lorentz (attiva), secondo la quale abbiamo

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2} \alpha_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}; \quad (M^{\mu\nu})^\alpha_\beta = i(\delta^{\mu\alpha} \delta^\nu_\beta - \delta^{\nu\alpha} \delta^\mu_\beta) \quad (1.1)$$

con $\alpha_{\mu\nu}$ matrice reale antisimmetrica.

Usando la consueta definizione dei generatori delle rotazioni \vec{J} ($\Rightarrow R(\vec{\phi}) = e^{-i\vec{\phi} \cdot \vec{J}}$) e dei generatori dei boosts di Lorentz \vec{K} ($\Rightarrow B(\eta\vec{n}) = e^{-i\eta\vec{n} \cdot \vec{K}}$; $\eta \equiv th^{-1}\beta$) ne segue che (sia le rotazioni che i boost sono trasformazioni attive, cioè agenti sul sistema e non sul riferimento, che resta fisso !)

$$\vec{J} \equiv (M^{23}, M^{31}, M^{12}); \quad \vec{K} \equiv (M^{01}, M^{02}, M^{03}) \quad (1.2)$$

$$[J_m, J_n] = i\epsilon_{mnr} J_r; \quad [J_m, K_n] = i\epsilon_{mnr} K_r; \quad [K_m, K_n] = -i\epsilon_{mnr} J_r \quad (1.3)$$

Circa poi le regole di commutazione di questi generatori con l'impulso, ricordiamo che risulta

$$[M^{\mu\nu}, P^\sigma] = -i(P^\mu \delta^{\nu\sigma} - P^\nu \delta^{\mu\sigma}) \quad (1.4)$$

$$i.e. \quad [J_m, P_n] = i\epsilon_{mnr} P_r; \quad [J_m, P_0] = 0; \quad [K_m, P_n] = i P_0 \delta_{mn}; \quad [K_m, P_0] = -i P_m$$

Nel seguito daremo per noto quanto già illustrato nella parte propedeutica, cioè nel Corso di "Complementi di Fisica Nucleare e Subnucleare".

In quell'ambito abbiamo visto come il quadro delle particelle elementari³ e delle loro interazioni costituisca il cosiddetto *Modello Standard*.

Quanto alle particelle elementari, come si è visto, in questo modello esse sono raggruppate in tre famiglie di massa crescente di "*leptoni*", soggetti solo all'interazione elettrodebole

$$\begin{array}{llll} \nu_e(\bar{\nu}_e) & \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) & \nu_\tau(\bar{\nu}_\tau) & carica \ 0 \\ e^-(e^+) & \mu^-(\mu^+) & \tau^-(\tau^+) & carica \ -1(+1) \end{array}$$

ed in tre famiglie di massa crescente di "*quarks*", soggetti anche all'interazione forte

$$\begin{array}{llll} u(\bar{u}) & c(\bar{c}) & t(\bar{t}) & q = +2/3 \ (-2/3) \\ d(\bar{d}) & s(\bar{s}) & b(\bar{b}) & q = -1/3 \ (+1/3) \end{array}$$

Nel Modello Standard, le interazioni fra le particelle elementari di cui sopra sono descritte nel contesto della Teoria dei Campi Relativistica (*QFT*), e ciascuna di esse possiede un opportuno mediatore, i.e.

- il fotone, per l'interazione elettromagnetica;
- il W^\pm e lo Z^0 , per l'interazione debole⁴ propriamente detta;
- i gluoni, per l'interazione forte.

Sia la Teoria elettrodebole (*EW*) che quella forte (*QCD*) hanno la struttura di *teorie di gauge* e sono teorie di campo rinormalizzabili.

da cui segue in particolare che lo scalare di Lorentz $W^\mu W_\mu$ commuta con P^σ .

Venendo infine al caso di massa nulla, infine, le rappresentazioni irriducibili di \mathcal{P} sono ancora più semplicemente caratterizzate solo in termini di un numero quantico intero o semidispari λ , che è chiamato *elicità* e descrive la proiezione dello spin intrinseco della particella nella direzione del suo impulso. Questa quantità, se la massa è nulla e quindi la particella viaggia costantemente alla velocità della luce, è invariante per trasformazioni di Lorentz.

³Ricordiamo che per particella elementare intendiamo una particella di cui non è nota alcuna struttura interna. Questo aspetto, come già abbiamo avuto modo di mettere in evidenza, non ha nulla a che vedere con l'eventuale instabilità della particella stessa poiché l'instabilità non è legata al fatto che i prodotti del decadimento siano *costituenti* della particella instabile!

Il muone, per esempio, che decade in un elettrone, un neutrino ed un antineutrino, per quanto ne sappiamo fino ad oggi, è una particella elementare e l'elettrone il neutrino e l'antineutrino a cui dà luogo non sono in nessun senso suoi costituenti. Il decadimento avviene solo perché le interazioni deboli accoppiano lo stato di muone con quello fatto dalle tre particelle suddette, per cui è possibile una transizione da uno stato all'altro...

⁴In realtà l'interazione elettromagnetica e debole sono unificate nella Teoria Elettrodebole.

2 Cenni di Teoria Quantistica dei Campi

2.1 Introduzione

La Teoria Quantistica dei Campi (QFT) nasce dalla sintesi della teoria classica dei campi (cfr. Appendice), il cui paradigma principale è il campo elettromagnetico classico, con la teoria delle Meccanica Quantistica e quella della Relatività Ristretta.

Il campo, che indicheremo per il momento genericamente con $\Phi(x)$, ma senza implicare con questo che esso non possa avere più componenti, viene visto, in ogni punto dello spazio-tempo, come una sorta di coordinata lagrangiana generalizzata e come tale, in MQ , esso è un operatore che agisce nello spazio di Hilbert degli stati. La sua evoluzione, cioè le equazioni del campo, sono ottenute a partire da una opportuna Lagrangiana nel campo e nelle sue derivate $\mathcal{L}(\Phi(x), \partial\Phi(x), x)$, attraverso il principio di minima azione, che fornisce, come è noto, l'equazione

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^\alpha)} = 0 \quad (2.1)$$

dove abbiamo riportato esplicitamente l'eventuale indice associato alle possibili componenti del campo Φ .

Sempre attraverso la lagrangiana possiamo poi definire l'impulso coniugato al campo (ricordiamo che il campo in ogni punto deve essere visto come una coordinata lagrangiana generalizzata ...)

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \quad (2.2)$$

e quindi stabilire l'algebra del campo, attraverso le regole di commutazione (o anticommutazione) canoniche.

Un concetto cruciale per la comprensione del quadro attuale delle particelle elementari e delle loro interazioni, su cui vogliamo adesso fare qualche considerazione di carattere generale, è certamente quello della *simmetria*^{5,6}.

⁵A questo proposito, ricordiamo che, come avremo modo di giustificare in seguito, un operatore \mathcal{O} che descriva un isomorfismo unitario o antiunitario dello spazio di Hilbert degli stati in sé, è detto costituire una *simmetria* del sistema considerato.

Essa è *conservata* o *esatta* se lo stato di minima energia (vuoto) è non degenerare ed \mathcal{O} -invariante, mentre la lagrangiana del sistema risulta invariante in forma sotto la trasformazione in questione, ovvero se l'operatore \mathcal{O} commuta con l'hamiltoniana del sistema e dunque ne rispetta la dinamica.

Si parla poi, invece, di *simmetria rotta spontaneamente* se lo stato di minima energia è degenerare e non invariante sotto \mathcal{O} , mentre la simmetria è detta semplicemente *rotta* se la lagrangiana non è invariante in forma sotto \mathcal{O} , ovvero se \mathcal{O} non commuta con l'hamiltoniana del sistema.

⁶La parola *simmetria* significa "della stessa misura" ed esprimeva, nel mondo greco, il con-

Nel seguito tratteremo più diffusamente il caso delle simmetrie discrete, ma non possiamo non richiamare brevemente uno dei risultati più importanti ottenuti

cetto di commensurabilità, proporzione, rapporto armonico di dimensioni ... e per questo era legato anche al concetto stesso di bellezza. Da allora, il concetto di simmetria si è evoluto e certamente una sua definizione fra le più espressive e chiare è quella operativa di Hermann Weyl, secondo il quale *una entità possiede una simmetria se c'è qualcosa che possiamo fargli in modo che, dopo che l'abbiamo fatta, l'entità in questione continua ad apparire esattamente come prima*. In questa accezione, simmetria e invarianza risultano evidentemente sinonimi.

La simmetria che in Natura è molto comune è quella *destra-sinistra*, cioè la simmetria bilaterale o chirale: una specie di prendi 2 e paghi 1 !

L'insieme delle operazioni che lasciano invariante un sistema assegnato forma, come oggi sappiamo, un *gruppo*, ed è proprio questo strumento matematico che ha reso, poi, estremamente fertile il concetto di simmetria in Fisica.

Ma come si è arrivati al concetto di gruppo di simmetria ?

Dal tentativo di trovare la formula risolutiva delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto ! Vediamo brevemente come è successo, visto che questo è molto istruttivo anche quanto al modo stesso in cui dovremmo considerare l'opportunità della Ricerca di base ...

L'idea dell'equazione di primo grado e quindi l'idea stessa dell'incognita era nota, forse, già in epoca babilonese (1650 a.C., papiro di Ahmes) e si sapeva anche come risolverla

$$ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -b/a$$

Anche l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ si sa risolvere da tempo immemorabile, certamente da Diofanto (250 d.C.) in poi, anche se venivano cercate solo soluzioni positive (superfici, lunghezze, compensi ...) per cui accadeva talvolta che le soluzioni erano due, talvolta una sola e talvolta addirittura nessuna !

E' solo da Gauss (1777 – 1855) in poi, infatti, che sappiamo che, pur di cercare le soluzioni nel posto giusto, cioè nel campo complesso, una equazione di grado n ammette n soluzioni (eventualmente in parte coincidenti). Comunque, ben prima di Gauss, cioè fin dall'inizio del sedicesimo secolo, si sapeva risolvere l'equazione generale di terzo grado (Del Ferro, Tartaglia, Cardano) ed anche quella di quarto grado (Ferrari, 1545); però, quanto all'equazione di quinto grado, ogni sforzo continuava miseramente a fallire !

Furono Ruffini (1799) ed Abel (1824) i quali, indipendentemente, dimostrarono che ogni sforzo per trovare una risolvente generale era vano, ma la vera spiegazione del motivo del fallimento fu trovata successivamente da Evariste Galois (1832), il quale affrontò il problema da un lato completamente nuovo, ed è qui che entra la simmetria ! Egli provò a caratterizzare le equazioni attraverso le proprietà di permutazione dei polinomi a coefficienti razionali che si annullano sulle soluzioni dell'equazione data.

Sembra un discorso complicato ma non lo è: prendiamo, per esempio, la generica equazione (propria) di secondo grado $x^2 + bx + c = 0$ con b, c razionali. Se x_1 ed x_2 sono le sue radici, allora

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad b = -(x_1 + x_2); \quad c = x_1 x_2$$

dunque esistono almeno due polinomi razionali indipendenti

$$P_1(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + b; \quad P_2(\alpha, \beta) = \alpha\beta - c$$

che si annullano sulle soluzioni dell'equazione data, ed essi sono simmetrici per scambio.

L'idea di Galois fu dunque di considerare *tutti* i polinomi a coefficienti razionali che si annullano sulle radici dell'equazione data. Le permutazioni delle variabili del polinomio che lasciano invariante il suo valore (nullo) quando viene valutato sulle soluzioni dell'equazione costituiscono il *gruppo di Galois* associato all'equazione. Egli dimostrò, in generale, che questo gruppo

nel ventesimo secolo, riguardo al legame fra simmetrie e costanti del moto, cioè il Teorema di Noëther (1918) (per la dimostrazione e maggiori dettagli, vedi Appendice).

Questo Teorema vale per simmetrie "continue", descritte cioè da un gruppo di Lie ed afferma che, per ogni parametro del gruppo, esiste una corrente conservata. Più precisamente, esso stabilisce che, data una lagrangiana $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x)$ la quale sia invariante in forma sotto le trasformazioni descritte da un gruppo di Lie $G(\omega_a)$, allora, se l'azione della generica trasformazione del gruppo descritta dal parametro ω_a è tale che, quando esso sia preso infinitesimo, risulta

$$x \rightarrow x' : x'^\mu = x^\mu + \Lambda_a^\mu(x) \omega_a \equiv x^\mu + \delta x^\mu \quad (2.3)$$

$$\phi^\alpha(x) \rightarrow \psi^\alpha(x') : \psi^\alpha(x') = (\delta_\beta^\alpha + \Gamma_{a\beta}^\alpha \omega_a) \phi^\beta(x) \equiv \phi^\alpha(x) + \delta \phi^\alpha(x) \quad (2.4)$$

ne segue che le quadricorrenti

$$\Theta_a^\mu(x) \equiv \left[-\Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta(x) + \partial_\nu \phi^\alpha(x) \Lambda_a^\nu(x) \right] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \Lambda_a^\mu(x) \quad (2.5)$$

sono tutte, separatamente conservate.

Due brevi applicazioni per tutte (per maggiori dettagli, cfr. Appendice) ...

Se la lagrangiana non dipende esplicitamente dalle coordinate spazio-temporali, ovvero se $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$, allora essa è necessariamente invariante in forma sotto il gruppo di Lie a quattro parametri delle traslazioni, la cui azione è definita da

$$x \rightarrow x' : x'^\mu = x^\mu + \delta_a^\mu \omega^a \Rightarrow \Lambda_a^\mu = \delta_a^\mu \quad (2.6)$$

$$\phi^\alpha(x) \rightarrow \psi^\alpha(x') = \delta_\beta^\alpha \phi^\beta(x) \Rightarrow \Gamma_{a\beta}^\alpha = 0 \quad (2.7)$$

per cui, secondo la (2.5), le seguenti quattro correnti (ponendo, per maggiore chiarezza di notazioni, $a = \nu$)

$$\Theta_{\mu\nu}(x) = [\partial_\rho \phi^\alpha(x) \delta_\nu^\rho] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = \partial_\nu \phi^\alpha(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

coincide con il gruppo S_n delle permutazioni di n oggetti, dove n è il grado dell'equazione. Galois dimostrò altresì che le radici di un'equazione potevano essere espresse a partire dalle quattro operazioni ed estrazioni di radice su espressioni costruite con i suoi coefficienti se e solo se, ordinando il gruppo in sottogruppi normali (S è un sottogruppo normale se, dato comunque un elemento x del gruppo, allora $sSx^{-1} = S$) massimali, i rapporti fra le loro cardinalità erano numeri primi.

Nel caso di S_2 , S_3 ed S_4 questo è vero, mentre da S_5 in poi questo diventa falso ...

E' dunque per questa strada che si giunse al concetto di *gruppo* ed in particolare a quello di gruppo di simmetria. Ma una volta definito il gruppo, questa entità matematica astratta può venire slegata dalla sua particolare rappresentazione su un qualunque sistema assegnato, per cui si è finito oggi per separare il concetto di simmetria (operazione) da quello di invarianza (effetto dell'operazione sul sistema dato).

soddisfano separatamente la condizione di conservazione $\partial^\mu \Theta_{\mu\nu}(x) = 0$ e dunque risulta che, definendo

$$P_\nu(t) \equiv \int d^3x \Theta_{0\nu}(x) \quad (2.9)$$

questa "carica" è conservata nel tempo, ovvero è una costante del moto.

Nel caso presente, non è difficile riconoscere nella (2.8) la definizione del tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} \partial_\nu \phi^\alpha(x) - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

per cui il teorema di Noëther mostra come la conservazione del quadrimpulso in un sistema isolato sia la conseguenza dell'invarianza (simmetria) per traslazioni della lagrangiana del sistema considerato.

Prima di continuare, osserviamo che, usando il tensore (2.10), possiamo riscrivere in modo più semplice anche la (2.5), mettendo in evidenza, nella corrente conservata, il contributo legato all'effetto della trasformazione sulle coordinate (δx) e quello ($\delta\phi$) sui campi stessi. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu a}(x) &\equiv \left[-\Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta(x) + \partial_\nu \phi^\alpha(x) \Lambda_a^\nu(x) \right] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \Lambda_{\mu a}(x) = \\ &= -\Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} + T_{\mu\rho}(x) \Lambda_a^\rho(x) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Passiamo adesso al secondo esempio di applicazione del Teorema di Noëther, particolarmente rilevante nell'ambito della Meccanica Quantistica.

Assumiamo che la Lagrangiana \mathcal{L} riguardi i campi $\psi \equiv \psi_1$ e $\psi^* \equiv \psi_2$, indipendenti nel senso della loro parte reale e immaginaria. Assumiamo altresì che \mathcal{L} sia invariante in forma sotto una trasformazione di gauge di prima specie⁷, i.e. sotto la trasformazione infinitesima interna ai campi

$$\begin{array}{lll} x'^\mu & \rightarrow & x^\mu & \Lambda^\mu(x) = 0 & ; \\ \psi & \rightarrow & \psi + i\alpha \psi & \Rightarrow & \Gamma_1^1 = i & ; & \Gamma_2^1 = 0 & ; \\ \psi^* & \rightarrow & \psi^* - i\alpha \psi^* & & \Gamma_1^2 = 0 & ; & \Gamma_2^2 = -i & ; \end{array}$$

In questo caso, la corrente conservata garantita dal Teorema di Noëther, in base alla (2.11), poiché la trasformazione non ha effetto sulle coordinate, è unicamente determinata dal solo effetto sui campi ed ha la forma seguente

$$J^\mu(x) = i \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \psi^* \right] \quad (2.12)$$

che, come avremo modo di vedere, è proporzionale, in generale, alla densità di corrente elettromagnetica (ovvero alla densità di probabilità, nello schema di prima quantizzazione).

⁷In questo caso il gruppo di simmetria è il gruppo di Lie (abeliano) ad un parametro $U(1)$ fatto dagli elementi $e^{i\alpha A}$, dove A è il generatore del gruppo stesso che, nella rappresentazione del gruppo che descrive la gauge di prima specie coincide semplicemente con l'unità.

2.1.1 Simmetrie discrete in Meccanica Quantistica

Tutte le particelle elementari sono descritte da un campo $\Phi(x)$, in generale *complesso*, le cui proprietà di trasformazione dipendono dalle caratteristiche specifiche della particella stessa.

Se il campo è intrinsecamente complesso, ovvero se, più propriamente, $\Phi(x)^\dagger$ è indipendente da $\Phi(x)$, allora particella e antiparticella risultano distinte (pur avendo esse la stessa massa e lo stesso spin), mentre se questo non accade come, per esempio, nel caso di un campo reale, la particella descritta è una sola e particella ed antiparticella coincidono⁸: il discriminante fra i due casi è l'eventuale presenza di carica (non necessariamente elettrica ...) associata alla particella: affinché essa possa essere antiparticella di se stessa è necessario che tutte le sue cariche siano nulle. Dunque, per esempio, nel caso dei fermioni, essendo essi tipicamente carichi, la particella risulta solitamente distinta⁹ dall'antiparticella¹⁰.

Nemmeno per i bosoni neutri (come il fotone) però la cosa è così automatica: per esempio, il π^0 è antiparticella di se stesso, ma il K^0 no !

Il punto sta nella legge di trasformazione del campo per coniugazione di carica C , una simmetria discreta che, insieme alla inversione temporale T ed alla parità P vogliamo adesso provare ad approfondire.

⁸Un caso in cui questo accade è, per esempio, quello del fotone: il campo A_μ è intrinsecamente reale ed il fotone non è diverso dall'antifotone.

⁹Questo non è in nessun modo una necessità legata al fatto che il campo usato per descrivere i fermioni è spinoriale, infatti il campo di Majorana, pur essendo spinoriale, non distingue la particella dall'antiparticella. Dipende invece dal fatto che il campo ed il suo aggiunto siano o no indipendenti fra loro.

¹⁰Per i neutrini non è ancora chiaro se questo sia vero, cioè se si tratti di particelle di Dirac (\Rightarrow neutrino \neq antineutrino) o di Majorana (\Rightarrow neutrino \equiv antineutrino).

Ricordiamo, per prima cosa, che noi siamo soliti definire *antineutrino* quella particella che, interagendo, può convertirsi in un leptone carico positivamente, cioè in un *antileptone*, o che, in un processo di interazione debole, viene emesso simultaneamente ad un leptone carico negativamente. In modo analogo definiamo il *neutrino* come quella particella che, interagendo, può convertirsi in un leptone negativo oppure che è emesso, in un processo debole, simultaneamente ad un leptone positivo.

E' lecito ora chiedersi, però, quale sia la caratteristica intrinseca che rende un neutrino capace di produrre leptoni negativi e che conferisce all'antineutrino le caratteristiche opposte.

Se i neutrini hanno massa non nulla, sono possibili due risposte distinte.

La prima possibilità è che i neutrini posseggano una pseudocarica (additiva), il numero leptonico, che si conserva rigorosamente e che vale -1 per neutrini e leptoni carichi negativamente, e $+1$ per antineutrini e leptoni carichi positivamente. In questo caso, il neutrino è distinto dalla sua antiparticella dal numero leptonico, in modo simile a quanto avviene per esempio per l'elettrone quanto alla carica elettrica. Si parla allora di "particella di Dirac" in quanto gli stati (liberi) di un tale neutrino possono essere descritti in termini di soluzioni dell'equazione di Dirac, i.e.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0$$

Per chiarire meglio il significato di queste simmetrie, inizieremo trattandole nell'ambito dello schema di prima quantizzazione, ovvero nell'ambito della Meccanica Quantistica non relativistica elementare.

Anche se può sembrare banale, inizieremo con il puntualizzare, in questo contesto, la distinzione fra proprietà *cinematiche* e *dinamiche* di un sistema fisico, perchè questo è un punto che deve essere ben chiaro, per poter afferrare poi compiutamente il concetto stesso di simmetria, che vogliamo discutere.

A questo scopo inizieremo richiamando, innanzitutto, alcuni aspetti formali relativi alla formulazione della *MQ*, che, del resto, dovrebbero essere già a tutti ben noti, e che sono essenziali perchè sia chiara la distinzione in questione. Questi aspetti riguardano

C'è però una seconda possibilità in accordo con i dati sperimentali secondo la quale tutte le particelle che chiamiamo neutrini potrebbero essere semplicemente caratterizzate dall'avere una elicità negativa, mentre per gli antineutrini essa sarebbe positiva. Potremmo quindi attribuire all'elicità il ruolo di distinguere neutrini da antineutrini.

In questo caso neutrino ed antineutrino sono semplicemente la stessa particella, differenziate solo dallo stato di spin: il numero leptonico non ha nessun significato fisico né, tantomeno, si conserva.

Un neutrino siffatto può essere descritto in termini di soluzioni dell'equazione di Majorana (E. Majorana, *Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone*, Il Nuovo Cimento 14 (1937) 171-184), i.e.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) - m\Psi_C(x) = 0$$

dove $\Psi_C(x) \equiv i\gamma^2 \Psi^*(x)$ (questo è equivalente alla notazione che useremo in seguito per il campo di Dirac, in cui $\Psi_C = \mathcal{C}^{-1} \bar{\Psi}^t$, con $\mathcal{C} = i\gamma^0 \gamma^2 = -\mathcal{C}^{-1}$).

Nel caso particolare in cui $\Psi = \Psi_C$, l'equazione descrive una particella che coincide con la propria antiparticella, i.e. una particella di Majorana.

Se i neutrini sono privi di massa, le due descrizioni sono indistinguibili. Essendo in questo caso l'elicità una grandezza conservata, scegliere una descrizione o l'altra risulta solo in una pura operazione di natura nominalistica, in cui si sostituisce, per esempio, l'espressione "elicità negativa" a quella "numero leptonico = -1" e viceversa.

In questo caso, i neutrini di Dirac hanno solo due componenti sterili che quelli di Majorana non hanno, ma non ci sono differenze osservabili particolari legate alle interazioni deboli.

Se però i neutrini hanno una massa non nulla, allora l'elicità non è un buon numero quantico, come lo dimostra il fatto che un opportuno boost di Lorentz è in grado di cambiarne il valore, per cui, passando da un riferimento ad un altro, un neutrino può apparire come un antineutrino e viceversa. Inoltre, poichè le interazioni deboli selezionano stati di chiralità definita e questi coincidono con quelli di elicità solo se la massa è nulla, nel caso di neutrini massivi di Majorana diventa possibile, per esempio, il decadimento *doppio beta* senza emissione di neutrini (decadimento proibito nel primo schema in cui il numero leptonico L è conservato),

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^-$$

proprio perchè la particella emessa nel decadimento beta, per via della presenza del proiettore chirale χ_- nella corrente debole carica, è in realtà uno stato misto, fatto quasi completamente di un antineutrino (elicità = +1), con una piccola "contaminazione" di neutrino (elicità = -1): quest'ultimo può quindi essere riassorbito dal nucleo $(A, Z + 1)$ con conseguente seconda emissione beta.

- la struttura matematica entro cui l'evoluzione temporale (il moto) e gli stati del sistema fisico vengono descritti;
- il set delle osservabili cinematiche (quantità misurabili, la cui definizione operativa prescinde dalle interazioni, ovvero dalle forze) e le relazioni (non causali) fra di loro (come le loro regole di commutazione) che determinano la struttura specifica dell'algebra delle osservabili associata ad un dato sistema fisico;
- la struttura generale delle equazioni della dinamica, che forniscono la relazione causale fra le variabili cinematiche.

Iniziamo dal primo punto, cioè dalla struttura matematica.

Dalla teoria elementare della MQ (prima quantizzazione) sappiamo che

1. ogni stato puro è descritto da un raggio $\{|\psi\rangle\}$ (sottospazio lineare unidimensionale, privato del vettore nullo) in uno spazio di Hilbert separabile¹¹ \mathcal{H} ;
2. se $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono due vettori dello spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati, allora, dati α e β numeri complessi qualsiasi, anche il vettore $|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ rappresenta uno stato¹² possibile del sistema (principio di sovrapposizione lineare);
3. ogni quantità misurabile è rappresentata da un operatore lineare hermitiano da \mathcal{H} in sé;
4. i soli valori ottenibili da una misura di un'osservabile sono gli autovalori dell'operatore hermitiano associato;
5. il valore di aspettazione di una data osservabile Q su uno stato puro $|\psi\rangle$ è $\langle\psi|Q|\psi\rangle$ quando $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Veniamo ora al secondo punto, relativo alle proprietà cinematiche delle osservabili del sistema.

Le relazioni cinematiche sono definite attraverso l'algebra degli operatori che rappresentano le variabili del sistema e sono usualmente formulate come regole di commutazione, le quali determinano appunto la struttura dell'algebra delle osservabili. Esempi ben noti sono

$$[x, p] = i\hbar \quad (2.13)$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k \quad (2.14)$$

¹¹Uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è separabile se e solo se ogni suo elemento può essere scritto come sovrapposizione di elementi di una base ortonormale numerabile opportuna $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$.

¹²Ignoreremo, per il momento, il problema dell'esistenza delle regole di superselezione.

Altre proprietà interne (ulteriori gradi di libertà ...) del sistema come, per esempio, lo spin isotopico, richiedono l'introduzione di altre variabili e delle relative regole di commutazione sia fra di loro che con le altre variabili che servono a caratterizzare il sistema.

Circa, infine, l'ultimo punto relativo alla dinamica, sappiamo che quest'ultima è definita completamente dall'operatore hamiltoniano H , il quale è esso stesso una osservabile, funzione, in generale, di variabili cinematiche (\vec{p} , \vec{x} , etc...).

Nella Schrödinger Picture (SP), come sappiamo, sono gli stati ad evolvere, i.e.

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \quad (2.15)$$

mentre nella Heisenberg Picture (HP) evolvono le osservabili e risulta equivalentemente che, se H non dipende esplicitamente dal tempo, è

$$i \hbar \dot{Q}(t) = [Q(t), H] \quad (2.16)$$

Dopo aver puntualizzato questi aspetti generali ben noti, torniamo adesso alla questione generale di che cosa debba essere considerato una Simmetria in MQ .

Come sappiamo, il prodotto scalare fra vettori di stato che siano normalizzati ha, in MQ , un significato fisico ben preciso:

$$| \langle a | b \rangle |^2 \quad (2.17)$$

rappresenta la probabilità di transizione fra gli stati $|a\rangle$ e $|b\rangle$, ovvero, per esempio, la probabilità che, effettuando una misura¹³ sullo stato $|b\rangle$, si possa ottenere come risultato lo stato $|a\rangle$.

Si capisce quindi la ragione per la quale, ad una Simmetria del sistema, che assumeremo genericamente rappresentata dall'operatore \mathcal{O} , è richiesto di conservare la (2.17), i.e., di essere tale per cui

$$| \langle \mathcal{O} a | \mathcal{O} b \rangle |^2 = | \langle a | b \rangle |^2 \quad \forall |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H} \quad (2.18)$$

In altre parole, ad una Simmetria è richiesto di essere un isomorfismo fra gli stati, tale da mantenere invariata la loro soggiacente struttura probabilistica.

Segue¹⁴ allora dalla (2.18) che possono aversi solo due casi¹⁵ : o l'operatore \mathcal{O} è

¹³L'osservabile corrispondente deve avere $|a\rangle$ come suo autovettore ...

¹⁴La dimostrazione si trova nell'Appendice al Capitolo 20 del libro

E. P. Wigner: *Group Theory and its applications to the quantum mechanics of the atomic spectra*, Academic Press, New York 1959.

oppure nell'Appendice A del secondo Capitolo del libro

S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge Univ. Press, 1995.

¹⁵Una Simmetria è un cambiamento di punto di vista e come tale non deve poter influenzare

lineare e allora la Simmetria che esso descrive è rappresentata da un operatore

i risultati di possibili esperimenti.

Se un osservatore vede un sistema fisico in uno stato (puro) rappresentato da un raggio \mathcal{R}_1 o \mathcal{R}_2 o, genericamente, \mathcal{R}_n , allora un altro osservatore, in virtù della trasformazione di simmetria, vedrà il sistema, rispettivamente, negli stati descritti dai raggi $\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2, \dots, \mathcal{R}'_n$: i due osservatori, però, osservando lo stesso sistema da punti di vista differenti, dovranno comunque concordare sul valore delle probabilità di transizione fra stati corrispondenti, i.e.

$$P(\mathcal{R}_i \rightarrow \mathcal{R}_j) \equiv P(\mathcal{R}'_i \rightarrow \mathcal{R}'_j) \quad (2.19)$$

e questa è l'unica condizione che viene messa affinché si possa parlare di simmetria.

Si osservi che, in base a quanto stiamo dicendo, a priori dobbiamo intendere la simmetria come definita, al momento, solo sui raggi e, di conseguenza, quindi, definita su almeno un vettore normalizzato per raggio.

Ricordiamo a questo proposito che un vettore di stato normalizzato $|e\rangle$ è definito e definisce un raggio $\mathcal{R} \equiv \{a e^{i\alpha} |e\rangle, a > 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$ nello spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati (il raggio è, tecnicamente, un sottospazio vettoriale unidimensionale di \mathcal{H} , privato dell'origine...).

Questo significa che se \mathcal{R}_a ed \mathcal{R}_b sono due raggi qualsiasi, individuati rispettivamente, modulo una fase, dai vettori normalizzati $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$, allora S è una Simmetria se e solo se, essendo $S\mathcal{R}_a$ ed $S\mathcal{R}_b$ i raggi corrispondenti attraverso S ad \mathcal{R}_a e \mathcal{R}_b e $|S\phi\rangle$ e $|S\psi\rangle$ i vettori normalizzati che, sempre modulo una fase, individuano i raggi trasformati, risulta

$$|\langle S\phi | S\psi \rangle|^2 = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 \quad (2.20)$$

Vogliamo dimostrare, seguendo la strada tracciata da Wigner già nel 1931, che, in questa ipotesi, S è un operatore unitario oppure antiunitario.

Iniziamo dimostrando che S deve essere invertibile sui raggi e per questo procediamo per assurdo. Se S non è invertibile, allora esisteranno due raggi differenti \mathcal{R}_a e \mathcal{R}_b , individuati da due opportuni vettori normalizzati $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ indipendenti, i quali sono mandati da S nello stesso raggio $S\mathcal{R}$, e quindi

$$|S\phi\rangle = |S\psi\rangle \quad (2.21)$$

Ma allora, da un lato avremmo che

$$|\langle S\phi | S\psi \rangle|^2 = |\langle S\phi | S\phi \rangle|^2 = 1 \quad (2.22)$$

mentre dall'altro dovremmo avere

$$|\langle S\phi | S\psi \rangle|^2 = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 < 1 \quad (2.23)$$

essendo, per ipotesi, i due vettori $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ indipendenti e normalizzati.

Consideriamo adesso una base ortonormale numerabile in \mathcal{H} (lo spazio di Hilbert, per ipotesi, è separabile e dunque ammette almeno una base ortonormale numerabile), fatta dai vettori $\{|e_k\rangle, k = 1, \dots, n, \dots\}$, ciascuno dei quali individua, quindi, il raggio $\mathcal{R}_k \equiv \{a e^{i\alpha} |e_k\rangle\}$.

Per ipotesi, dunque

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.24)$$

Consideriamo adesso i raggi trasformati dalla simmetria S , i.e.

$$\mathcal{R}_k \rightarrow S\mathcal{R}_k \equiv \mathcal{R}'_k = \{b e^{i\beta} |S e_k\rangle\} \quad (2.25)$$

$\mathcal{O} = U$ unitario, infatti

$$\langle U a | U b \rangle \equiv \langle a | U^\dagger U b \rangle = \langle a | b \rangle \Leftrightarrow U^\dagger U = I \quad (2.51)$$

dove i vettori normalizzati $|S e_k \rangle$, sulla base del fatto che è loro richiesto solo di definire i raggi $S\mathcal{R}_k$, sono evidentemente definiti a meno di una fase arbitraria.

Vogliamo dimostrare che anche $\{|S e_k \rangle\}$ è una base ortonormale dello spazio di Hilbert dato. Infatti, dalla (2.20) segue che

$$|\langle e_i | e_j \rangle|^2 = \delta_{ij} = |\langle S e_i | S e_j \rangle|^2 \quad (2.26)$$

e dunque i vettori $S e_j$ costituiscono un set di vettori ortonormali. Perché essi costituiscano una base, occorre che non esista alcun vettore non nullo che sia ortogonale a tutti loro.

Di nuovo procediamo per assurdo e sia $|\Omega \rangle$ questo vettore che, senza perdita di generalità, potremo assumere normalizzato. Per ipotesi

$$\forall j : \langle \Omega | S e_j \rangle = 0 \quad (2.27)$$

Il vettore $|\Omega \rangle$ individua comunque un raggio che, essendo S invertibile sui raggi, è controimmagine di un altro opportuno raggio descritto (modulo una fase) dal vettore normalizzato che indicheremo con $\hat{\Omega}$, per cui risulta

$$|\Omega \rangle = |S \hat{\Omega} \rangle \quad (2.28)$$

Sostituendo nella (2.27) ed usando la (2.20), abbiamo

$$\forall j : 0 = |\langle \Omega | S e_j \rangle|^2 = |\langle S \hat{\Omega} | S e_j \rangle|^2 = |\langle \hat{\Omega} | e_j \rangle|^2 \quad (2.29)$$

e questo è impossibile perché $\hat{\Omega}$ è normalizzato e quindi non nullo e $\{|e_i \rangle\}$ è, per ipotesi, una base: resta così dimostrato che $\{|S e_j \rangle\}$ è anch'essa una base ortonormale.

Prima di continuare dobbiamo adesso cercare di fissare la convenzione di fase per i vettori normalizzati $|S e_j \rangle$. Per questo consideriamo i vettori normalizzati

$$|\phi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1 \rangle + |e_k \rangle), \quad k > 1 \quad (2.30)$$

Ciascuno di essi individua univocamente il raggio \mathcal{R}_k che, attraverso la simmetria S , sarà trasformato nel raggio $\mathcal{R}'_k \equiv S\mathcal{R}_k$, a sua volta individuato da un opportuno versore $|S \phi_k \rangle$, definito a meno di una fase. Per la (2.20), abbiamo

$$|\langle S \phi_k | S e_1 \rangle|^2 = |\langle \phi_k | e_1 \rangle|^2 = \frac{1}{2} = |\langle S \phi_k | S e_k \rangle|^2 \quad (2.31)$$

mentre, per la stessa ragione, tutti gli altri coefficienti dello sviluppo di $|S \phi_k \rangle$ nella base $|S e_j \rangle$ sono identicamente nulli. Dunque

$$|S \phi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\alpha} |S e_1 \rangle + e^{i\beta} |S e_k \rangle) \quad (2.32)$$

Ma $|S \phi_k \rangle$ è definito a meno di una fase e così pure i vettori normalizzati $|S e_j \rangle$: possiamo dunque fissare la convenzione di fase in modo che risulti

$$\forall k > 1 : |S \phi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S e_1 \rangle + |S e_k \rangle) \quad (2.33)$$

e resta comunque ancora indeterminata una fase "globale" del tutto irrilevante ...

Ma che cosa accade ad un generico vettore normalizzato, relativo ad un generico raggio \mathcal{R} ?

Partiamo dunque dal vettore

$$|\psi\rangle = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle \quad (2.34)$$

che assumeremo, senza perdita alcuna di generalità, essere tale che $\lambda_1 \neq 0$ (altrimenti basterà rinominare i vettori della base ...). Sia adesso $|S\psi\rangle$ il versore (definito a meno di una fase) che individua il raggio trasformato $S\mathcal{R}$. Chiaramente, dalla definizione stessa di base, segue che

$$|S\psi\rangle = \sum_j \lambda'_j |S e_j\rangle \quad (2.35)$$

Ma usando la (2.20), ricaviamo subito che

$$\forall j : |\langle e_j | \psi \rangle|^2 = |\langle S e_j | S \psi \rangle|^2 \Rightarrow |\lambda_j|^2 = |\lambda'_j|^2 \quad (2.36)$$

e analogamente

$$\forall k > 1 : |\langle \phi_k | \psi \rangle|^2 = |\langle S \phi_k | S \psi \rangle|^2 \Rightarrow |\lambda_1 + \lambda_k|^2 = |\lambda'_1 + \lambda'_k|^2 \quad (2.37)$$

da cui, usando il fatto che abbiamo assunto, per ipotesi, $\lambda_1 \neq 0$, si ha

$$\left| \frac{\lambda_1 + \lambda_k}{\lambda_1} \right|^2 = \left| \frac{\lambda'_1 + \lambda'_k}{\lambda'_1} \right|^2 \Rightarrow \left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} \right|^2 \quad (2.38)$$

la quale implica che possano valere, in generale, solo le seguenti due possibilità

$$(a) : \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} \quad (2.39)$$

$$(b) : \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} \right)^* \quad (2.40)$$

A priori potrebbe accadere, comunque, che, al variare di k potesse valere l'una o l'altra delle due condizioni di cui sopra ...

Non è così !

Per dimostrarlo, procediamo per assurdo e supponiamo che per un indice $k \neq 1$ valga la condizione (a) mentre per un indice $j \neq 1$ valga la condizione (b) (assumeremo che i rapporti siano intrinsecamente complessi e quindi deve essere necessariamente anche che $j \neq k$...). Definiamo allora il vettore normalizzato

$$|\phi_{kj}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|e_1\rangle + |e_k\rangle + |e_j\rangle) \quad (2.41)$$

Poiché i rapporti fra i coefficienti che esprimono il vettore dato nella base dei vettori $|e_i\rangle$ sono tutti reali, in ogni caso resteranno reali anche nel caso del vettore $|S\phi\rangle$ espresso nella base $|S e_i\rangle$, e quindi

$$|S \phi_{kj}\rangle = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{3}}(|S e_1\rangle + |S e_k\rangle + |S e_j\rangle) \quad (2.42)$$

oppure l'operatore \mathcal{O} è antilineare¹⁶, e allora la Simmetria è rappresentata da un

ma allora, ritornando al generico vettore di stato $|\psi\rangle$, abbiamo che deve essere altresì

$$|\langle \phi_{kj} | \psi \rangle|^2 = |\langle S\phi_{kj} | S\psi \rangle|^2 \Rightarrow |\lambda_1 + \lambda_k + \lambda_j|^2 = |\lambda'_1 + \lambda'_k + \lambda'_j|^2 = \quad (2.43)$$

unitamente al fatto che $|\lambda_1| = |\lambda'_1|$. Risulta allora

$$|\lambda_1 + \lambda_k + \lambda_j|^2 = |\lambda'_1 + \lambda'_k + \lambda'_j|^2 \Rightarrow \left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} + \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} + \frac{\lambda'_j}{\lambda'_1} \right|^2 \quad (2.44)$$

e quindi, per l'ipotesi fatta sopra,

$$\left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} + \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} + \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^* \right|^2 \quad (2.45)$$

Ma in generale, dati due numeri complessi z e z' ,

$$|1 + z + z'|^2 = |1 + z + z'^*|^2 \Leftrightarrow (\Im(z + z'))^2 = (\Im(z - z'))^2 \Rightarrow \Im(z) \cdot \Im(z') = 0 \quad (2.46)$$

che, nel caso particolare della (2.45), in generale è falso.

Resta dunque provato che, data una simmetria S che soddisfa la (2.20), può accadere che

$$\forall k : \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} \Leftrightarrow \lambda'_k = \lambda_k \frac{\lambda'_1}{\lambda_1} \Leftrightarrow \lambda'_k = e^{i\epsilon} \lambda_k \quad (2.47)$$

oppure può essere che

$$\forall k : \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda'_k}{\lambda'_1} \right)^* \Leftrightarrow \lambda'_k = \lambda_k^* \frac{\lambda'_1}{\lambda_1^*} \Leftrightarrow \lambda'_k = e^{i\epsilon} \lambda_k^* \quad (2.48)$$

Ridefinendo la trasformazione a meno della fase globale $e^{i\epsilon}$ inessenziale, arriviamo alle sole due possibilità:

$$(a) : \lambda'_k = \lambda_k \quad (2.49)$$

$$(a) : \lambda'_k = \lambda_k^* \quad (2.50)$$

estendibili in modo ovvio a tutto lo spazio di Hilbert in modo che, nel caso (a) l'operatore che descrive la simmetria sia lineare e unitario, mentre nel caso (b) sia antilineare e antiunitario.

¹⁶Ricordiamo che, nella ben nota terminologia di Dirac, ad ogni *ket* $|\psi\rangle$ dello spazio di Hilbert \mathcal{H} degli stati, è associato un *bra* $\langle\psi|$ nel duale di \mathcal{H} (coincidente con esso, data la sua struttura hilbertiana) tale che

$$|\psi\rangle = \alpha |a\rangle + \beta |b\rangle \Leftrightarrow \langle\psi| = \alpha^* \langle a| + \beta^* \langle b| \quad (2.52)$$

Un operatore \mathcal{O} dello spazio di Hilbert in sé è lineare se accade che

$$\mathcal{O}(\alpha |a\rangle + \beta |b\rangle) = \alpha \mathcal{O}|a\rangle + \beta \mathcal{O}|b\rangle \quad (2.53)$$

mentre è antilineare se

$$\mathcal{O}(\alpha |a\rangle + \beta |b\rangle) = \alpha^* \mathcal{O}|a\rangle + \beta^* \mathcal{O}|b\rangle \quad (2.54)$$

Vediamo le conseguenze che discendono da queste definizioni.

Se $|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots$ è una base ortonormale dello spazio di Hilbert, allora ogni suo vettore è univocamente rappresentato da un'unica combinazione lineare dei vettori della base.

Posto dunque che sia

$$|\psi\rangle = \lambda_i |e_i\rangle \quad (2.55)$$

ne segue che per l'operatore lineare V risulta

$$V|\psi\rangle = \lambda_i V|e_i\rangle \equiv \lambda_i V_{ji} |e_j\rangle \quad (2.56)$$

dove la matrice complessa V_{ji} descrive appunto l'azione dell'operatore V sugli elementi della base, i.e.

$$V|e_i\rangle \equiv V_{ji} |e_j\rangle \Leftrightarrow V_{ji} \equiv \langle e_j | V e_i \rangle \equiv \langle e_j | V | e_i \rangle \quad (2.57)$$

Per l'operatore antilineare A , invece, risulta

$$A|\psi\rangle = \lambda_i^* A|e_i\rangle \equiv \lambda_i^* A_{ji} |e_j\rangle \quad (2.58)$$

dove la matrice complessa A_{ji} descrive, anche in questo caso, l'azione dell'operatore A sugli elementi della base assegnata, in modo formalmente identico al caso precedente, i.e.

$$A|e_i\rangle = A_{ji} |e_j\rangle \Leftrightarrow A_{ji} \equiv \langle e_j | A e_i \rangle \equiv \langle e_j | A | e_i \rangle \quad (2.59)$$

Come si vede, sugli elementi della base, gli operatori lineari e antilineari agiscono sostanzialmente nello stesso modo, essendo la loro azione descritta in entrambi i casi da una opportuna matrice complessa. Ciò che li differenzia è il comportamento sulle combinazioni lineari degli elementi della base. Inoltre, dati due vettori generici

$$|\psi\rangle = \lambda_i |e_i\rangle, \quad |\phi\rangle = \mu_j |e_j\rangle \quad (2.60)$$

per un operatore lineare si ha

$$\langle \phi | V | \psi \rangle \equiv \langle \phi | V \psi \rangle = \mu_j^* \langle e_j | \lambda_i V_{ki} e_k \rangle = \mu_j^* V_{ji} \lambda_i \quad (2.61)$$

mentre per un operatore antilineare si ha ancora

$$\langle \phi | A \psi \rangle \equiv \mu_j^* \langle e_j | A \psi \rangle \quad (2.62)$$

ma adesso è

$$|A\psi\rangle = A(\lambda_i |e_i\rangle) = \lambda_i^* A|e_i\rangle = \lambda_i^* A_{ki} |e_k\rangle \quad (2.63)$$

per cui ne segue che

$$\langle \phi | A \psi \rangle = \mu_j^* \lambda_i^* A_{ji} \quad (2.64)$$

Come si vede, la differenza rispetto al caso dell'operatore lineare è che i coefficienti dello sviluppo del ket a cui l'operatore antilineare è applicato, entrano nel prodotto scalare non direttamente ma attraverso i loro complessi coniugati.

Ad ogni operatore lineare V viene poi associato il suo aggiunto V^\dagger , ponendo

$$\langle V \phi | \psi \rangle \equiv \langle \phi | V^\dagger \psi \rangle \Leftrightarrow \langle V \phi | = \langle \phi | V^\dagger \quad (2.65)$$

operatore $\mathcal{O} = A$ antiunitario, per il quale risulta

$$\langle A a | A b \rangle \equiv \langle a | A^\dagger A b \rangle^* = \langle a | b \rangle^* \quad (2.75)$$

Dalla definizione segue che per un operatore lineare è

$$\langle e_i | V^\dagger \equiv \langle V e_i | = V_{ji}^* \langle e_j | \quad (2.66)$$

e dunque, definita la matrice V^+ come l'hermitiana coniugata della matrice V , si ha

$$\langle e_i | V^\dagger e_j \rangle \equiv \langle e_i | V^\dagger | e_j \rangle = (V^+)_{ij} \quad (2.67)$$

ovvero, su due generici vettori $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, è appunto

$$\begin{aligned} \langle V \phi | \psi \rangle &= \langle V (\mu_i e_i) | \lambda_k e_k \rangle = \mu_i^* V_{ki}^* \lambda_k = \mu_i^* \lambda_k (V^+)_{ik} \\ &\equiv \langle \phi | V^\dagger \psi \rangle = \mu_i^* \lambda_k (V^+)_{ik} \\ &\Leftrightarrow (V^\dagger) = V^+ \end{aligned} \quad (2.68)$$

Dunque, nel caso di un operatore lineare V , la matrice che descrive, in una base assegnata, l'operatore V^\dagger è la matrice V^+ , hermitiana coniugata della matrice che, nella stessa base, descrive l'operatore V stesso.

Anche per un operatore antilineare A si può definire l'aggiunto A^\dagger , però occorre qualche cautela, dato che la definizione usata per l'operatore lineare (2.65) non è più direttamente applicabile, come lo dimostra il fatto che, se λ è un numero complesso qualsiasi, allora

$$\langle A(\lambda \phi) | \psi \rangle = \langle \lambda^* A \psi | \psi \rangle = \lambda \langle A \phi | \psi \rangle \quad (2.69)$$

mentre

$$\langle \lambda \phi | A^\dagger \psi \rangle = \lambda^* \langle \phi | A^\dagger \psi \rangle \quad (2.70)$$

L'unica definizione di operatore aggiunto che sia coerente con il carattere antilineare di A è infatti quella secondo cui anche A^\dagger è antilineare e risulta

$$\langle A \phi | \psi \rangle \equiv \langle \phi | A^\dagger \psi \rangle^* \quad (2.71)$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \langle A \phi | \psi \rangle &= \langle A(\mu_i e_i) | \lambda_j e_j \rangle = \langle \mu_i^* A_{ki} e_k | \lambda_j e_j \rangle = \mu_i^* A_{ki}^* \lambda_k = \mu_i^* \lambda_k (A^+)_{ik} \\ &\equiv \langle \phi | A^\dagger \psi \rangle^* = \langle \mu_i e_i | \lambda_j^* (A^\dagger)_{kj} e_k \rangle^* = [\mu_i^* \lambda_j^* (A^\dagger)_{ij}]^* = \mu_i \lambda_j (A^\dagger)_{ij}^* \\ &\Rightarrow (A^\dagger) = A^t \end{aligned} \quad (2.72)$$

Dunque, per l'operatore antilineare A , la matrice che descrive il suo aggiunto A^\dagger in una base assegnata è la matrice (A^t) , trasposta della matrice che, nella stessa base, descrive appunto l'operatore A .

Si parla infine di un operatore lineare V come di un operatore unitario se

$$\langle V \phi | V \psi \rangle \equiv \langle \phi | V^\dagger V \psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle \quad \Leftrightarrow \quad V^\dagger V = I \quad (2.73)$$

mentre un operatore antilineare è definito antiunitario se

$$\langle A \phi | A \psi \rangle \equiv \langle \phi | A^\dagger A \psi \rangle^* = \langle \phi | \psi \rangle^* \quad \Leftrightarrow \quad A^\dagger A = I \quad (2.74)$$

Sempre a proposito degli operatori antiunitari, osserviamo che, fissata una base ortonormale qualsiasi $|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots$ possiamo definire su questa base l'operatore antiunitario K di coniugazione complessa nel modo seguente¹⁷

$$K|e_i\rangle \equiv |e_i\rangle \Rightarrow K \sum_i \lambda_i |e_i\rangle = \sum_i \lambda_i^* |e_i\rangle \quad (2.76)$$

Esso è antiunitario, infatti, se

$$|\psi\rangle = \lambda_i |e_i\rangle, \quad |\phi\rangle = \mu_j |e_j\rangle \quad (2.77)$$

allora risulta

$$\begin{aligned} K|\psi\rangle &= \lambda_i^* |e_i\rangle; \\ K|\phi\rangle &= \mu_j^* |e_j\rangle \Rightarrow \langle K\phi| = \mu_j \langle e_j| \end{aligned} \quad (2.78)$$

e dunque

$$\langle K\phi|K\psi\rangle = \mu_i \lambda_i^* \equiv \langle \psi|\phi\rangle \quad (2.79)$$

Evidentemente, poi, dalla (2.76) risulta altresì che

$$K^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad K = K^{-1} \quad (2.80)$$

e siccome K è antiunitario, dunque tale per cui $K^\dagger K = I$, evidentemente si ha

$$K = K^\dagger \quad (2.81)$$

In termini di questo operatore K , dimostreremo adesso che ogni operatore antiunitario A si può scrivere come

$$A = U K \quad (2.82)$$

dove U è un opportuno operatore unitario.

Consideriamo infatti l'operatore AK e dimostriamo che esso è unitario.

Poiché, per ipotesi, A è antiunitario, si ha infatti

$$\langle (AK)\phi|(AK)\psi\rangle = \langle K\phi|K\psi\rangle^* \equiv \langle K\psi|K\phi\rangle = \langle \phi|\psi\rangle \quad (2.83)$$

¹⁷Si osservi che, date due basi diverse $|e_i\rangle$ ed $|f_j\rangle$, i due operatori di coniugazione complessa K_e e K_f definiti in ciascuna base attraverso la (2.76) *non* coincidono, bensì differiscono per una trasformazione unitaria. Abbiamo infatti che, poiché $|e_i\rangle$ ed $|f_j\rangle$ sono entrambe basi ortonormali, potremo certamente scrivere $|f_j\rangle = U_{ij}|e_i\rangle$ per cui

$$K_e|f_j\rangle = U_{ij}^*|e_i\rangle = U_{ij}^*(U^{-1})_{ki}|f_k\rangle = (U^{-1}(U^+)^\dagger)_{kj}|f_k\rangle \equiv (U^{-1}(U^+)^\dagger)_{kj} K_f|f_k\rangle$$

e la matrice $U^{-1}(U^+)^\dagger = U^{-1}(U^{-1})^\dagger$ è, evidentemente, unitaria ma, in generale, differente dall'identità ...

la quale dimostra come l'operatore $AK = U$ sia appunto unitario¹⁸ e quindi, moltiplicando a destra per K e tenendo conto che $K^2 = I$, che valga appunto la (2.82). Come già detto, K viene chiamato *operatore di coniugazione complessa*.

Vale la pena vederlo in azione in un caso molto semplice.

Consideriamo una particella senza gradi di libertà interni. Sappiamo allora che possiamo scegliere come base dello spazio di Hilbert quella fatta dagli autovettori $|x >$ della posizione, per cui, dalla definizione, in questa base è

$$K |x > = |x > \quad (2.84)$$

Consideriamo lo stato $|\psi >$, descritto dalla funzione d'onda $\psi(x)$,

$$|\psi > = \int dx \psi(x) |x > \quad (2.85)$$

Evidentemente questo stato viene trasformato dall'operatore K in quello descritto dalla funzione d'onda $\psi^*(x)$, infatti

$$K |\psi > = K \int dx \psi(x) |x > = \int dx \psi^*(x) K |x > = \int dx \psi^*(x) |x > \quad (2.86)$$

Un altro modo equivalente per determinare la funzione d'onda associata allo stato $K |\psi >$ è il seguente.

Evidentemente, così come la funzione d'onda associata, in rappresentazione delle coordinate, allo stato $|\psi >$ è

$$\psi(x) = \langle x | \psi > \quad (2.87)$$

analogamente la funzione d'onda associata, nella stessa rappresentazione, allo stato $K |\psi >$, sarà

$$\langle x | K \psi > \quad (2.88)$$

D'altronde K è antiunitario, $K^2 = I$ e, per definizione, $K |x > = |x >$, per cui risulta

$$\langle x | K \psi > = \langle K K x | K \psi > = \langle K x | K \psi > = \langle x | \psi >^* \equiv \psi^*(x) \quad (2.89)$$

E' interessante, a questo punto, osservare, data la definizione (2.84), che cosa succede ad un autostato dell'impulso. Si ha

$$|\vec{p} > = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{x} > \quad (2.90)$$

¹⁸In generale, risulta infatti che il prodotto di un operatore unitario per un operatore antiunitario è antiunitario, mentre il prodotto di due operatori antiunitari risulta unitario.

per cui, evidentemente, risulta

$$K|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{x}\rangle = |-\vec{p}\rangle \quad (2.91)$$

ovvero, avendo definito K in modo che lasci invariati gli autostati della posizione, ecco che questo operatore manda $|\vec{p}\rangle$ in $|-\vec{p}\rangle$.

Naturalmente, se altrettanto lecitamente avessimo definito K partendo dalla base degli autostati dell'impulso $|p\rangle$, sarebbero stati gli autostati della posizione a cambiare di segno sotto il suo effetto ...

Ma riprendiamo adesso la questione delle Simmetrie in MQ .

Abbiamo concluso con Wigner che una simmetria deve essere rappresentata da un operatore unitario o da un operatore antiunitario \mathcal{O} , il quale manda lo spazio di Hilbert degli stati \mathcal{H} in sé

$$\mathcal{O} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (2.92)$$

e dunque ne costituisce un isomorfismo che, nel linguaggio della teoria degli spazi di Hilbert, è un modo per dire che esso descrive una trasformazione di base ortonormale¹⁹

$$|e_i\rangle \rightarrow \mathcal{O}|e_i\rangle \equiv |e_i\rangle' : \quad \delta_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle = \langle \mathcal{O}e_i | \mathcal{O}e_j \rangle \quad (2.94)$$

In Meccanica Quantistica, però, sappiamo che gli effetti prodotti da una trasformazione \mathcal{O} sui vettori di stato, possono essere resi equivalentemente²⁰ con la seguente trasformazione sulle osservabili Q del sistema

$$Q \rightarrow Q' = \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O} \quad (2.95)$$

¹⁹E' facile convincersi che questo vale sia nel caso (ovvio !) dell'operatore unitario che in quello dell'operatore antiunitario, visto che, in ogni caso risulta

$$|\langle \mathcal{O}e_i | \mathcal{O}e_j \rangle| = |\langle e_i | e_j \rangle| = \delta_{ij} \quad (2.93)$$

²⁰Se \mathcal{O} è un operatore lineare, la conclusione è immediata per il fatto che risulta

$$\langle \mathcal{O}\psi | Q | \mathcal{O}\phi \rangle = \langle \mathcal{O}\psi | Q \mathcal{O}\phi \rangle = \langle \psi | \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O} \phi \rangle = \langle \psi | \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O} | \phi \rangle$$

Altrimenti, c'è una differenza legata al carattere antilineare dell'operatore, e risulta

$$\langle \mathcal{O}\psi | Q | \mathcal{O}\phi \rangle = \langle \mathcal{O}\psi | Q \mathcal{O}\phi \rangle = \langle \psi | \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O} \phi \rangle^* = \langle \psi | \mathcal{O}^\dagger Q \mathcal{O} | \phi \rangle^*$$

per cui, nel caso di simmetrie in cui, come abbiamo visto, $\mathcal{O}^\dagger = \mathcal{O}^{-1}$ possiamo equivalentemente adottare i due punti di vista per cui

$$a) \quad |e_i\rangle \rightarrow |e'_i\rangle = \mathcal{O}|e_i\rangle; \quad Q \rightarrow Q \quad (2.96)$$

$$b) \quad Q \rightarrow Q' = \mathcal{O}^{-1} Q \mathcal{O}; \quad |e_i\rangle \rightarrow |e_i\rangle \quad (2.97)$$

Chiaramente, se indichiamo adesso con \mathcal{A} l'algebra delle osservabili Q del sistema dato e con \mathcal{A}' quella definita dalle osservabili Q' , la simmetria \mathcal{O} definisce a sua volta un isomorfismo fra le due algebre (peraltro coincidenti ...)

$$\mathcal{I}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}' \text{ per cui } Q' = \mathcal{I}(Q) \equiv \mathcal{O}^{-1} Q \mathcal{O} \quad (2.98)$$

il quale, in quanto isomorfismo, conserva certamente le regole di commutazione (anticommutazione) fra gli operatori²¹ dell'algebra.

In molti casi, però, *non* si conosce esplicitamente l'operatore \mathcal{O} , ovvero il suo modo di agire sugli stati del sistema, bensì, magari, si hanno informazioni *a priori* sulla forma che l'isomorfismo indotto da \mathcal{O} dovrebbe produrre su un set opportuno di osservabili o operatori dell'algebra \mathcal{A} .

In questo caso, per definire \mathcal{O} , si può procedere partendo proprio da queste leggi di trasformazione, badando bene a verificare, comunque, la loro compatibilità cinematica con la struttura dell'algebra, i.e. la loro compatibilità con le regole di commutazione o anticommutazione in essa definite.

Una simmetria, insomma, rispetterà la struttura probabilistica presente nello spazio di Hilbert degli stati, e questo implica che essa sarà anche una trasformazione cinematicamente ammissibile.

Parleremo poi, come già detto, di *simmetria conservata* se essa è anche compatibile con la dinamica e di *simmetria rotta*, se invece questo non accade.

Per una simmetria conservata, se $|\psi, t\rangle$ è il risultato al tempo t dell'evoluzione temporale dello stato $|\psi, 0\rangle$ al tempo $t = 0$, allora deve accadere che $\mathcal{O}|\psi, t\rangle$ descriva il risultato al tempo t dell'evoluzione temporale dello stato $\mathcal{O}|\psi, 0\rangle$ al tempo $t = 0$, ottenuto a partire dalla stessa dinamica !

²¹Per capirci meglio, se R è una rotazione e \mathcal{O}_R l'operatore (unitario) che la rappresenta, allora, per esempio, per quanto riguarda il momento angolare, che è un operatore vettoriale, si avrà

$$\mathcal{O}_R^{-1} J_i \mathcal{O}_R \equiv J'_i = R_{ij} J_j \quad (2.99)$$

e deve aversi (come in realtà si ha)

$$[J'_i, J'_j] = i \epsilon_{ijk} J'_k \quad (2.100)$$

così come è

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k \quad (2.101)$$

E' facile convincersi che se l'operatore \mathcal{O} che descrive la simmetria è unitario, la simmetria è conservata se e solo se risulta $[\mathcal{O}, H] = 0$, ovvero se l'operatore che descrive la simmetria commuta con l'hamiltoniana.

Partiamo infatti dall'equazione di evoluzione temporale per gli stati

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \quad (2.102)$$

Se \mathcal{O} commuta con l'hamiltoniana, allora data una qualsiasi soluzione $|\psi, t\rangle$ dell'equazione di evoluzione temporale (2.102), ecco che

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle &= H |\psi, t\rangle \Rightarrow \mathcal{O} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle \right) = \mathcal{O} H |\psi, t\rangle \\ &\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} |\psi, t\rangle = \mathcal{O} H |\psi, t\rangle = H \mathcal{O} |\psi, t\rangle \end{aligned} \quad (2.103)$$

i.e., anche $\mathcal{O} |\psi, t\rangle$ è soluzione della (2.102).

Il viceversa è altrettanto vero, infatti se per ogni soluzione $|\psi, t\rangle$ della (2.102), anche $\mathcal{O} |\psi, t\rangle$ è soluzione, allora, per il solo fatto che $|\psi, t\rangle$ è soluzione, risulta

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} |\psi, t\rangle = \mathcal{O} H |\psi, t\rangle \quad (2.104)$$

mentre, per il fatto che anche $\mathcal{O} |\psi, t\rangle$ è per ipotesi soluzione, risulta anche

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} |\psi, t\rangle = H \mathcal{O} |\psi, t\rangle \quad (2.105)$$

ed il confronto fra le due relazioni mostra che

$$H \mathcal{O} |\psi, t\rangle = \mathcal{O} H |\psi, t\rangle \quad (2.106)$$

su qualsiasi soluzione dell'equazione di evoluzione temporale.

Essendo le funzioni in questione una base, questo implica appunto che

$$[\mathcal{O}, H] = 0 \quad (2.107)$$

In modo analogo, per una generica simmetria antiunitaria \mathcal{O} , si arriva invece alla conclusione che, per essere conservata, essa deve anticommutare²² con H , i.e.

$$\{\mathcal{O}, H\} = 0 \quad (2.109)$$

²²Se $|\psi, t\rangle$ è soluzione dell'equazione di evoluzione temporale e $\{\mathcal{O}, H\} = 0$, allora

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle &= H |\psi, t\rangle \Rightarrow \mathcal{O} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle \right) = \mathcal{O} H |\psi, t\rangle \\ &\Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} |\psi, t\rangle = \mathcal{O} H |\psi, t\rangle = -H \mathcal{O} |\psi, t\rangle \end{aligned} \quad (2.108)$$

dunque anche $\mathcal{O} |\psi, t\rangle$ è soluzione dell'equazione di evoluzione temporale per la stessa hamiltoniana. Analogamente si procede all'inverso ...

Questo fatto, però ha come conseguenza che se $|E\rangle$ è autovettore di H per l'autovalore E , allora il vettore $\mathcal{O}|E\rangle$ è autovettore di H per l'autovalore $-E$ e dunque lo spettro dell'hamiltoniana deve essere simmetrico rispetto all'origine. Questo, però, non è possibile perché lo spettro dell'hamiltoniana H è limitato verso il basso (esiste uno stato di minima energia del sistema), mentre non lo è per valori positivi ...

Questa è la ragione per la quale Wigner, all'inizio, esclude la possibilità che esistessero simmetrie antiunitarie: come vedremo, questa conclusione ha una eccezione che è proprio la time-reversal T (in cui, comunque H e T commutano!).

In alcune formulazioni, poi, nel concetto di simmetria si include pure la richiesta che anche la dinamica libera sia compatibile con la trasformazione, ovvero che

$$[\mathcal{O}, H_0] = 0 \quad (2.110)$$

dove

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} \quad (2.111)$$

Nel seguito del Corso, come già anticipato, ci limiteremo a trattare solo il caso delle simmetrie discrete²³ di parità P , di coniugazione di carica C e inversione temporale (time-reversal) T .

²³Il caso delle simmetrie continue e analitiche, cioè il caso in cui le simmetrie unitarie del sistema costituiscono un gruppo di Lie, non verrà trattato.

Ricordiamo soltanto che, in questo caso, ogni simmetria sarà rappresentata nello spazio di Hilbert degli stati del sistema da un operatore unitario che commuta con l'hamiltoniana. Affinché questo accada, occorre e basta che l'hamiltoniana commuti con i generatori del gruppo (o, piuttosto, con la loro rappresentazione nello spazio di Hilbert ...) i quali quindi, essendo hermitiani, rappresentano osservabili che risultano dunque conservate durante l'evoluzione temporale del sistema.

Di questo genere è la simmetria imposta dal principio di Relatività e dalla richiesta di omogeneità dello spazio-tempo, secondo cui lo spazio di Hilbert degli stati di un qualunque sistema fisico che sia isolato *deve* essere isomorfo a se stesso quando si osservi il sistema dato da un diverso sistema di riferimento inerziale.

Questo significa, come sappiamo, che deve essere definita sullo spazio di Hilbert degli stati del sistema una rappresentazione unitaria del gruppo di Poincaré $U(a, \Lambda)$, dove (a, Λ) è il generico elemento del gruppo, con a generica traslazione nello spazio-tempo e Λ generica trasformazione del gruppo di Lorentz ortocrono proprio.

2.1.2 La Parità

Consideriamo adesso la simmetria di parità P .

Questa deve operare sulle osservabili rispettando il loro modo classico di trasformarsi ed inoltre, come ogni simmetria, deve essere cinematicamente ammissibile. Iniziamo richiedendo dunque che, sulla base dell'analogia classica, sia

$$\vec{X} \rightarrow \vec{X}' \equiv P^{-1} \vec{X} P = -\vec{X} \quad (2.112)$$

da cui segue evidentemente²⁴ che $P | \vec{x} >$ deve essere autovettore della posizione \vec{X} per l'autovalore $-\vec{x}$ (ma non necessariamente coincidente con $- | \vec{x} >$!).

Una conseguenza²⁵ è allora che $P^2 | \vec{x} >$ deve concidere, di nuovo, con il vettore di stato iniziale, a meno di un possibile fattore di fase, i.e.

$$P^2 | \vec{x} > = e^{i\eta} | \vec{x} > \quad (2.114)$$

Siccome $| \vec{x} >$ è una base, se vogliamo che P^2 rispetti il principio di sovrapposizione, la fase η deve essere unica in tutto lo spazio di Hilbert degli stati e quindi, assumendo che P sia unitario, essa può essere riassorbita²⁶ nella definizione stessa dell'operatore P in modo tale che risulti

$$P^2 = I \quad (2.115)$$

Per quanto riguarda P , a priori saremmo autorizzati solo a dire che

$$P | \vec{x} > = e^{i\alpha(\vec{x})} | -\vec{x} > \quad (2.116)$$

ed il vincolo su P^2 impone solo che $\alpha(\vec{x}) + \alpha(-\vec{x}) = 0$.

Assumeremo²⁷ ancora, oltre al fatto già citato che P sia unitaria, che la fase α non dipenda da \vec{x} e dunque, dovendo essere $P^2 = I$, potrà essere solo

$$P | \vec{x} > = \pm | -\vec{x} > \quad (2.117)$$

²⁴Infatti se $| \vec{x} >$ è autovettore dell'osservabile \vec{X} per l'autovalore \vec{x} , allora, dalla (2.112) segue evidentemente che

$$\vec{X}' | \vec{x} > = -\vec{x} | \vec{x} > = P^{-1} \vec{X} P | \vec{x} > \Rightarrow -\vec{x} P | \vec{x} > = \vec{X} P | \vec{x} > \quad (2.113)$$

²⁵Stiamo qui assumendo che il sistema sia semplice e senza spin, altrimenti occorre tenere conto anche delle proprietà di trasformazione delle altre variabili che, insieme alle coordinate, costituiscono un set completo di osservabili per il sistema.

²⁶Con questo intendiamo dire che se $P^2 | \vec{x} >$ deve rappresentare lo stesso stato rappresentato dal vettore $| \vec{x} >$, allora $P^2 (| \vec{x} > + | \vec{y} >)$ deve anch'esso coincidere con $| \vec{x} > + | \vec{y} >$ a meno di un fattore di fase, e questo può accadere solo se η è indipendente da \vec{x} . Ridefinendo allora $\hat{P} \equiv e^{-i\eta/2} P$ ecco che, nell'ipotesi che P sia unitario, $\hat{P}^2 = I \dots$

²⁷Non dimentichiamoci, infatti, che quanto stiamo facendo è di cercare di arrivare ad una definizione di P , per cui abbiamo ampia libertà sul suo modo di operare, limitata solo dall'analogia classica, dalla coerenza interna e dal fatto che vogliamo arrivare alla definizione di una simmetria che, almeno nei casi in cui classicamente questo già accade, sia *conservata*.

Chiameremo "scalari" i sistemi per cui $P|\vec{x}\rangle = |-\vec{x}\rangle$ e "pseudoscalari" quelli per cui, invece $P|\vec{x}\rangle = -|-\vec{x}\rangle$.

Osserviamo adesso che, avendo in questo modo definito l'operatore di parità P su una base²⁸, esso risulta completamente determinato.

Vediamo dunque come agisce, per esempio, sull'operatore di impulso \vec{P} .

Ricordiamo che \vec{P} è il generatore delle traslazioni spaziali, per cui una traslazione infinitesima $\delta\vec{a}$ è rappresentata dall'operatore

$$\mathcal{T}(\delta\vec{a}) \approx I + \frac{i}{\hbar} \vec{P} \cdot \delta\vec{a} \quad (2.118)$$

Siccome, classicamente, una traslazione di a seguita da una parità è equivalente ad una parità seguita da una traslazione di a nel verso opposto, ovvero di $-a$, per coerenza dobbiamo richiedere che

$$P\mathcal{T}(\delta\vec{a}) = \mathcal{T}(-\delta\vec{a})P \quad (2.119)$$

ovvero che (si osservi che $\delta\vec{x}$ qui è un parametro, non un operatore ...)

$$P\left(I + \frac{i}{\hbar} \vec{P} \cdot \delta\vec{a}\right) = \left(I - \frac{i}{\hbar} \vec{P} \cdot \delta\vec{a}\right)P = \quad (2.120)$$

e dunque che

$$P(i\vec{P}) = -i\vec{P}P \quad (2.121)$$

Questa relazione, se l'operatore P è unitario, implica che, come ci aspettiamo in base all'analogia classica, la parità anticommuta anche con l'impulso, i.e. risulti

$$P^{-1}\vec{P}P = -\vec{P} \quad (2.122)$$

Quanto poi all'azione indotta dalla simmetria di parità P sull'algebra delle osservabili, visto il modo come siamo arrivati alla sua definizione e cioè attraverso la sua azione su una base (quella degli autostati delle coordinate ...), questa non può che essere compatibile²⁹ con le regole di commutazione che, in ultima analisi, si riducono a quelle canoniche fra posizione e impulso

$$[X_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad (2.123)$$

²⁸Di nuovo, stiamo qui assumendo di trattare il caso della particella singola senza spin.

²⁹Si osservi che se avessimo assunto P come antiunitario, allora per la (2.121) esso dovrebbe commutare con l'impulso e questo sarebbe ancora compatibile con le regole di commutazione canoniche!

Solamente, secondo questa definizione, si andrebbe contro l'aspettativa classica, in base alla quale ci attendiamo che, sotto parità, tutte le grandezze vettoriali cambino di segno ...

dato che, come sappiamo, tutta l'algebra delle osservabili³⁰ della particella materiale senza struttura interna poggia unicamente su queste regole di commutazione.

Perchè poi questa simmetria sia conservata, come abbiamo già detto, occorre e basta che

$$[P, H] = 0 \quad (2.126)$$

ovvero, essendo

$$H = \frac{|\vec{P}|^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad (2.127)$$

occorre e basta³¹ che $P^{-1} V P = V \Leftrightarrow V(-\vec{x}) = V(\vec{x})$, cioè, come c'era ovviamente da aspettarci, che il potenziale sia una funzione *pari* della posizione.

³⁰Un'altra variabile cinematica importante per il sistema di una particella singola senza spin è certamente il momento angolare \vec{J} . Esso, essendo definito come

$$\vec{J} = \vec{X} \times \vec{P} \quad (2.124)$$

ha proprietà di trasformazione sotto parità immediatamente deducibili da quelle della posizione (2.112) e dell'impulso (2.122), risultando, ovviamente,

$$[\vec{J}, P] = 0 \quad (2.125)$$

in accordo con quanto ci aspetteremmo in base all'analogia classica, visto che \vec{J} è un vettore assiale (pseudovettore).

³¹Si osservi che l'operatore di parità P così definito commuta certamente con l'hamiltoniana libera $H_0 = \frac{1}{2m} |\vec{p}|^2$.

2.1.3 La Coniugazione di Carica

Un'altra simmetria discreta molto interessante è certamente quella della coniugazione di carica C . Essa è più facilmente comprensibile nell'ambito della Teoria Quantistica dei Campi e per poterne parlare in modo non banale nello schema della prima quantizzazione, occorre considerare un sistema fatto da una carica in interazione con il campo elettromagnetico, per cui l'hamiltoniana completa del sistema è

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + eV = \\ &= \frac{|\vec{P}|^2}{2m} - \frac{e}{2mc} (\vec{A} \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \vec{A}) + \frac{e^2}{2mc^2} |\vec{A}|^2 + eV \end{aligned} \quad (2.128)$$

dove e è la carica elettrica, \vec{A} è il potenziale vettore e V il potenziale scalare.

E' immediato verificare che l'hamiltoniana di cui sopra è invariante sotto la seguente trasformazione di simmetria C del campo elettromagnetico e della carica elettrica

$$e \rightarrow -e \quad (2.129)$$

$$\vec{A} \rightarrow -\vec{A} \quad (2.130)$$

$$V \rightarrow -V \quad (2.131)$$

con \vec{P} e \vec{X} invariati.

Visto che gli operatori di impulso e di posizione non cambiano sotto C , affinché essa conservi le regole di commutazione è necessario solo che risulti

$$C^{-1} i C = i \quad (2.132)$$

ovvero che C sia lineare e non antilineare, e dunque sia una simmetria unitaria.

Avremo modo di capirne meglio il significato ed il suo modo di agire quando la riprenderemo nell'ambito della Teoria Quantistica dei Campi.

2.1.4 La simmetria di inversione temporale

Si tratta della simmetria discreta meno intuitiva di tutte.

Intanto va notato che essa, nonostante il nome, non ha tanto a che vedere con l'inversione del tempo, quanto piuttosto con la reversibilità dei processi fisici.

Per meglio capire di che si tratta, vale la pena iniziare addirittura dalla Meccanica Classica, considerando appunto un sistema meccanico, per esempio un punto materiale di massa m il quale, al tempo t abbia velocità $\vec{v}(t)$ e sia semplicemente soggetto, per esempio, alla forza di gravità.

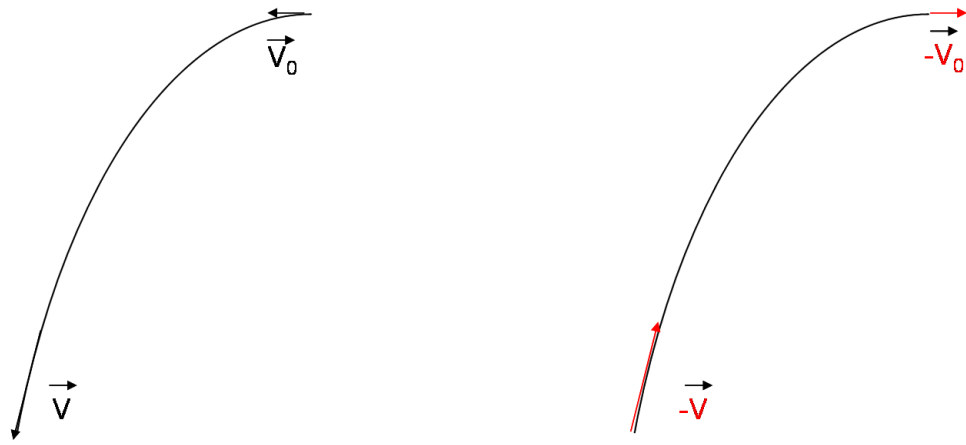


Figure 2: *Reversibilità della traiettorie di un punto materiale nel campo della gravità*

Al tempo $t + \Delta t$, fissate le condizioni iniziali al tempo t , i.e. $(\vec{X}(t) \equiv \vec{X}_0, \vec{v}(t) \equiv \vec{v}_0)$, il punto materiale si troverà nella posizione $\vec{X}(t + \Delta t)$ ed il suo stato di moto sarà tale che

$$v_x(t + \Delta t) = v_{0x} \equiv v'_x; \quad v_y(t + \Delta t) = v_{0y} + g \Delta t \equiv v'_y \quad (2.133)$$

Chiedersi se c'è invarianza per inversione temporale (Time-reversal) della legge del moto significa

- prendere come nuovo punto di partenza quello di arrivo, i.e. $(\vec{X}(t + \Delta t) \equiv \vec{X}', \vec{v}(t + \Delta t) \equiv \vec{v}')$;
- applicare la trasformazione di Time-reversal allo stato e dunque cambiare il segno della velocità $\vec{v}' \rightarrow T(\vec{v}') \equiv -\vec{v}'$, lasciando inalterata la posizione;

- lasciare evolvere lo stato così ottenuto ancora per il solito intervallo di tempo Δt , secondo la stessa dinamica;
- verificare se il nuovo stato finale così ottenuto coincide o meno con il T -trasformato di quello di partenza.

Nel caso considerato della sola forza di gravità in assenza di attrito, questo è ciò che effettivamente accade, infatti, dopo il tempo Δt , la stessa legge di moto avrà fatto sì che la nuova velocità acquisita dal punto materiale sia

$$\begin{aligned} v_x'' &= T(v_x') = -v_{0x} \\ v_y'' &= T(v_y') + g \Delta t = -(v_{0y} + g \Delta t) + g \Delta t = -v_{0y} \end{aligned}$$

ed avrà fatto ripercorrere a ritroso la stessa traiettoria descritta originariamente dal grave, per cui possiamo concludere che il moto di un punto materiale nel campo della gravità è effettivamente T -invariante.

E' opportuno, comunque, puntualizzare che, nel trarre questa conclusione, abbiamo implicitamente assunto che la massa m del corpo ed il campo della gravitazione non siano alterati dalla trasformazione di Time-reversal, ovvero che siano T -invarianti. Per capire meglio cosa intendiamo dire, osserviamo che, nella trattazione precedente, nulla cambierebbe se, al posto di un punto materiale nel campo della gravità ci fosse una carica elettrica in un campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ dato. Avremmo ancora reversibilità del moto, pur di assumere che la carica ed il campo elettrico siano invarianti per Time-reversal.

Che succederebbe, però, se oltre al campo elettrico fosse presente, per esempio, anche un campo magnetico?

E' evidente dall'espressione della forza di Lorentz che, visto che per Time-reversal la velocità cambia segno, affinché T possa essere una simmetria conservata in elettrodinamica, occorre assumere che \vec{B} , a differenza di \vec{E} , cambi segno³² sotto T .

Tutto questo per dire che, nel momento in cui dovremo trattare un problema in cui è presente un'interazione con campi esterni, prima di trarre conclusioni, sarà necessario tenere conto anche delle proprietà di trasformazione di questi ultimi sotto la simmetria considerata ...

Un altro modo equivalente a quello esposto sopra per verificare se in un certo sistema meccanico è rispettata l'invarianza per Time reversal è quello di partire dalla legge di moto

$$\vec{x} = \vec{x}(t) \tag{2.134}$$

e verificare se, sotto la trasformazione

$$T : \quad t \rightarrow \bar{t} = -t \tag{2.135}$$

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}_T(\bar{t}) = \vec{x}(t) \tag{2.136}$$

³²Questo non ha nulla di misterioso né di contraddittorio con quanto accade per il campo elettrico, visto che il campo magnetico è prodotto da cariche in moto e che, sotto T , il moto si inverte di segno ...

la nuova legge di moto

$$\vec{x}_T(\bar{t}) = \vec{x}(-\bar{t}) \quad (2.137)$$

implica comunque la stessa dinamica³³ (relativamente alla variabile temporale \bar{t}).

Ma veniamo adesso al problema della simmetria di Time-reversal in Meccanica Quantistica e poniamoci, per comodità, nella Schrödinger Picture.

Alla luce di quanto detto sopra, se $|\psi, t\rangle$ è l'evoluto al tempo t dello stato $|\psi\rangle$ al tempo $t = 0$, vogliamo che, se T è rispettata, allora lo stato $T|\psi, t\rangle$, lasciato evolvere ancora per un tempo t , conduca di nuovo a $T|\psi\rangle$.

Ma come agisce l'operatore T sui vettori dello spazio di Hilbert?

Così come abbiamo fatto per la Parità e la Coniugazione di Carica, occupiamoci innanzi tutto di definire l'azione di T sulle consuete osservabili \vec{X} e \vec{P} , usando l'analogia classica e avendo bene in mente la necessità che questa definizione sia anche compatibile con le regole di commutazione canoniche (compatibilità cinematica).

Evidentemente, partendo dal significato classico che attribuiamo a questa simmetria, richiederemo ragionevolmente che risulti

$$T^{-1} \vec{X} T = \vec{X} \quad (2.143)$$

$$T^{-1} \vec{P} T = -\vec{P} \quad (2.144)$$

Queste due semplici richieste, però, sono già sufficienti per dirci che se vogliamo che T sia una simmetria, ovvero che rispetti le regole di commutazione canoniche

³³Evidentemente, nel caso di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza esterna $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$, questo è sempre vero, poiché la seconda legge della dinamica

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x}) \quad (2.138)$$

è invariante sotto la trasformazione $t \rightarrow \bar{t} = -t$, per la quale risulta

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}_T(\bar{t}) = \vec{x}(-\bar{t}) = \vec{x}(t) \quad (2.139)$$

$$\dot{\vec{x}}(t) \rightarrow \dot{\vec{x}}_T(\bar{t}) = -\dot{\vec{x}}(-\bar{t}) = -\dot{\vec{x}}(t) \quad (2.140)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) \rightarrow \ddot{\vec{x}}_T(\bar{t}) = \ddot{\vec{x}}(-\bar{t}) = \ddot{\vec{x}}(t) \quad (2.141)$$

Più in generale, in Meccanica Classica c'è invarianza per Time reversal quando il sistema è retto da un potenziale funzione solo delle coordinate e quindi il sistema è descritto da una lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q_i) \quad (2.142)$$

che, chiaramente, è invariante in forma sotto la trasformazione (2.135), i.e. sotto la trasformazione $q_i \rightarrow q_i$, $\dot{q}_i \rightarrow -\dot{q}_i$.

$[x_i, p_j] = i \hbar \delta_{ij}$, allora è necessario che

$$T^{-1} i T = -i \quad (2.145)$$

ovvero che T sia rappresentato da un operatore antiunitario³⁴.

Vediamo quindi che cosa deve essere richiesto³⁵ all'hamiltoniana affinché la simmetria di Time-reversal così introdotta sia conservata.

Ripartiamo per questo dalla legge di evoluzione temporale degli stati che ben conosciamo

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \quad (2.148)$$

$$\Rightarrow T H |\psi, t\rangle = T i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle \quad (2.149)$$

e poniamo per definizione

$$T |\psi, t\rangle \equiv |\psi_T, \bar{t}\rangle \quad (2.150)$$

Per quanto detto, T sarà una simmetria conservata se $|\psi_T, \bar{t}\rangle$ evolve nella variabile temporale \bar{t} con la stessa dinamica (i.e., con la stessa hamiltoniana) secondo la quale lo stato $|\psi, t\rangle$ evolve nella variabile temporale t .

Quali ne sono le implicazioni?

³⁴Nel suo lavoro originario del 1932

E.P. Wigner; *Über die Operation der Zeitumkehr in der Quantenmechanik*

Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Physik Kl. 32, 546 (1932)

Wigner richiede che l'hamiltoniana libera H_0 sia T -invariante ed usa l'equazione di evoluzione temporale nella Schrödinger Picture per dimostrare che T deve essere antiunitario.

Questo viene dedotto dal fatto che l'equazione contiene il fattore $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ al primo ordine.

Ciò però non è corretto, infatti, nel caso, per esempio, della generalizzazione relativistica dell'equazione del moto libero di una particella (scalare), l'equazione di Klein-Gordon è del secondo ordine ...

In realtà l'antiunitarietà dell'operatore T è imposta dal rispetto delle condizioni cinematiche ovvero dal rispetto delle regole di commutazione fra posizione ed impulso !

Si osservi che è ancora il carattere antiunitario di T a garantire la sua consistenza con le regole di commutazione del momento angolare, i.e.

$$[J_i, J_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} J_k \quad (2.146)$$

dovendo essere, per la (2.143) e la (2.144) ed il suo significato classico

$$T^{-1} \vec{J} T = -\vec{J} \quad (2.147)$$

³⁵Si ricorderà che, per una generica simmetria antiunitaria, avevamo dimostrato che, per essere conservata, essa doveva anticommutare con H , da cui, poi, il problema dello spettro di H non limitato verso il basso ...

Essendo, per ipotesi, T antiunitario, risulta

$$T i \hbar \frac{\partial}{\partial t} = -i \hbar \frac{\partial}{\partial t} T = i \hbar \frac{\partial}{\partial \bar{t}} T \quad (2.151)$$

e quindi si ha

$$T H |\psi, t\rangle = T i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = i \hbar \frac{\partial}{\partial \bar{t}} T |\psi, t\rangle \quad (2.152)$$

Se e solo se H e T commutano, i.e.

$$[H, T] = 0 \quad (2.153)$$

allora l'equazione (2.152) diviene

$$\begin{aligned} H T |\psi, t\rangle = T H |\psi, t\rangle &= i \hbar \frac{\partial}{\partial \bar{t}} T |\psi, t\rangle \\ \Rightarrow H |\psi_T, \bar{t}\rangle &= i \hbar \frac{\partial}{\partial \bar{t}} |\psi_T, \bar{t}\rangle \end{aligned} \quad (2.154)$$

la quale mostra che se $|\psi, t\rangle$ è soluzione dell'equazione di evoluzione temporale per l'hamiltoniana H , allora anche $|\psi_T, \bar{t}\rangle \equiv T |\psi, t\rangle$ lo è.

Quindi, per quanto riguarda l'operatore di inversione temporale T , possiamo concludere che esso deve essere antiunitario e, affinché possa rappresentare una simmetria conservata del sistema, così come nel caso delle simmetrie unitarie, deve commutare con l'hamiltoniana.

Vediamo adesso di esplicitare l'azione dell'operatore T nel caso più semplice della particella senza spin.

Come sappiamo, lo stato fisico $|\psi, t\rangle$ di una generica particella di massa m senza spin è univocamente determinato dalla sua funzione d'onda

$$\psi(x, t) = \langle x | \psi, t \rangle \quad (2.155)$$

tale quindi per cui

$$|\psi, t\rangle = \int dx \psi(x, t) |x\rangle \quad (2.156)$$

Per il fatto che T ed X commutano, poniamo

$$T |x\rangle = |x\rangle \quad (2.157)$$

ovvero definiamo T sulla base degli autostati della posizione in modo che sia coincidente con l'operatore di coniugazione complessa K , che abbiamo preceden-

temente già incontrato, definito sulla stessa base. Ne segue dunque che³⁶

$$T |\psi, t\rangle = \int dx \psi(x, t)^* |x\rangle \quad (2.160)$$

e dunque che la funzione d'onda associata allo stato $T |\psi, t\rangle \equiv |\psi_T, \bar{t}\rangle$ è semplicemente la funzione $\psi^*(x, t) \equiv \psi^*(x, -\bar{t})$.

Vediamo ora che, come c'era da aspettarsi dall'analogia classica, T è una simmetria conservata se la particella interagisce con un potenziale funzione solo delle coordinate. In quel caso, infatti, se $\psi(x, t)$ è soluzione dell'equazione di evoluzione temporale (equazione di Schrödinger)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (2.161)$$

con $H = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x)$, allora, dovendo essere la funzione V reale affinché l'operatore H possa essere hermitiano, evidentemente risulta, prendendo il complesso coniugato dell'equazione data, che vale anche la relazione

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = H \psi^* \quad (2.162)$$

e dunque, essendo $\bar{t} = -t$, che si ha

$$i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial \bar{t}} = H \psi^* \quad (2.163)$$

che dimostra quanto enunciato sopra.

Allo scopo di fissare bene le idee su come agisce la trasformazione di Time Reversal prima definita, vale la pena, adesso, di vedere che cosa succede nel caso della particella libera (senza spin) di impulso definito \vec{p} . Chiaramente lo stato $|\vec{p}, t\rangle$, posto $E \equiv p^2/2m$, ha come funzione d'onda la funzione

$$\psi(\vec{x}, t) \equiv \langle \vec{x} | \vec{p}, t \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} e^{-iEt/\hbar} \quad (2.164)$$

³⁶Ricordiamo che, partendo dalla definizione dell'operatore di coniugazione complessa definito sulla base delle coordinate, abbiamo già visto, per la (2.91), che risulta

$$K |\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle \quad (2.158)$$

ovvero, dato che abbiamo identificato T con K , ne risulta che l'operatore di inversione temporale applicato all'autostato dell'impulso per l'autovalore \vec{p} lo trasforma nell'autostato dello stesso operatore per l'autovalore $-\vec{p}$, i.e.

$$T |\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle \quad (2.159)$$

in perfetto accordo con quanto ci aspetteremmo in base all'analogia classica.

Per quanto abbiamo detto, la funzione d'onda associata allo stato $T | \vec{p}, t >$ risulta coincidere con la funzione che si ottiene dalla (2.164) prendendone la complessa coniugata, ma *scritta come funzione di $\bar{t} = -t$* , i.e.

$$\langle \vec{x} | T | \vec{p}, t \rangle = \psi^*(\vec{x}, t) = \psi_T(\vec{x}, \bar{t}) \quad (2.165)$$

e dunque

$$\psi_T(\vec{x}, \bar{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} e^{-iE\bar{t}/\hbar} \quad (2.166)$$

da cui, evidentemente, ne concludiamo che lo stato $T | \vec{p}, t >$ risulta avere impulso opposto a quello dello stato iniziale (come avevamo già osservato) ma *continua ad avere la stessa energia* dello stato di partenza, e non energia opposta (che non significherebbe nulla di sensato ...), come potremmo erroneamente ritenere, basandoci solo sull'effetto della coniugazione complessa.

Questo fatto³⁷ discende formalmente dall'azione congiunta della coniugazione complessa e dal fatto che, dopo la trasformazione T , la nuova variabile temporale rispetto a cui occorre riferire l'evoluzione dello stato è \bar{t} e non t medesima!

Vediamo adesso che cosa succede quando c'è anche lo spin.

In questo caso la sola coniugazione complessa K in generale non basta più per rappresentare T nello spazio di Hilbert delle funzioni d'onda poichè questo operatore non è sufficiente per garantire l'invarianza delle regole di commutazione per quanto concerne gli operatori di spin. Ricordiamo infatti che \vec{S} dovrà, come il momento orbitale \vec{J} , anticommutare con T , ovvero questo operatore dovrà essere tale che

$$T S_k = -S_k T \quad (2.167)$$

Poniamoci, per semplicità, nel caso di spin 1/2: gli operatori di spin sono proporzionali alle matrici di Pauli S_x , S_y ed S_z

³⁷La conclusione a cui siamo giunti era del tutto prevedibile sulla base dell'analogia classica. Nell'ambito della MQ , comunque, le cose non cambiano infatti se T è conservata allora essa deve commutare con l'hamiltoniana H del sistema e quindi risulta

$$H |E \rangle = E |E \rangle \quad \Rightarrow \quad T H |E \rangle = H T |E \rangle = E T |E \rangle$$

la quale mostra appunto che se $|E \rangle$ è autostato di H per l'autovalore E , allora anche $T |E \rangle$ lo è, per lo stesso autovalore.

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_1 \quad (2.168)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_2 \quad (2.169)$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_3 \quad (2.170)$$

E' subito evidente che la sola coniugazione complessa non potrà più essere sufficiente, infatti essa, mentre potrebbe bastare per S_y , che è rappresentata da una matrice fatta da immaginari puri, certamente non può bastare per S_x ed S_z , rappresentate entrambe da matrici reali.

Ci dobbiamo dunque attendere adesso che sia

$$T = U K \quad (2.171)$$

dove U sarà una matrice unitaria che agisce nello spazio dello spin in modo da garantire, complessivamente, che T soddisfi la (2.167).

Quali sono allora le condizioni sulla matrice U ?

Evidentemente, per quanto detto, occorre che U , commutando con S_y , inverta il segno di S_x e S_z .

Chiaramente si deve trattare quindi di una rotazione di π intorno all'asse y , i.e. dell'operatore unitario³⁸

$$U = e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_2} \quad (2.174)$$

$$= I \cos(\pi/2) + i\sigma_2 \sin(\pi/2) = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv R \quad (2.175)$$

Dunque, nel caso dello spin 1/2, proprio per ragioni cinematiche, i.e. affinché le regole di commutazione (dello spin) siano preservate, sarà

$$T = R K \quad (2.176)$$

dove R è la matrice di rotazione (unitaria) data dalla (2.175).

³⁸Ricordiamo infatti che, per definizione

$$e^{i\alpha\sigma_2} \equiv I + i\alpha\sigma_2 + \frac{1}{2!}(i\alpha\sigma_2)^2 + \frac{1}{3!}(i\alpha\sigma_2)^3 + \dots \quad (2.172)$$

ma siccome $(\sigma_2)^2 = I$, ne segue che

$$e^{i\alpha\sigma_2} = I \left[1 + \frac{1}{2!}(i\alpha)^2 + \dots \right] + \sigma_2 \left[i\alpha + \frac{1}{3!}(i\alpha)^3 + \dots \right] = I \cos\alpha + i\sigma_2 \sin\alpha \quad (2.173)$$

2.1.5 L'operatore T^2

In generale, il semplice fatto che T sia antiunitario ha una conseguenza molto importante.

Consideriamo l'operatore T^2 : esso è unitario e, applicato ad uno stato qualsiasi, questo potrà cambiarlo solo per un fattore di fase che, essendo T antiunitario, non può essere riassorbito attraverso una sua ridefinizione. Decidiamo dunque una base ortonormale qualsiasi $|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots$ dello spazio di Hilbert. Sarà

$$T^2 |e_i\rangle = e^{i\eta_i} |e_i\rangle \quad (2.177)$$

D'altronde T è antiunitario, quindi, in generale, in termini dell'operatore di coniugazione complessa K già introdotto, esso può essere scritto con l'ausilio di un opportuno operatore unitario U nella forma $T = U K$. Abbiamo allora

$$T = U K \quad \Rightarrow \quad T^2 = U K U K \quad (2.178)$$

ovvero, posto che

$$U |e_i\rangle = U_{ji} |e_j\rangle \quad (2.179)$$

risulta

$$\begin{aligned} T^2 |e_i\rangle &= U K U K |e_i\rangle = U K U |e_i\rangle = U K U_{ji} |e_j\rangle = U U_{ji}^* |e_j\rangle = \\ &= U_{ji}^* U_{kj} |e_k\rangle = (U U^*)_{ki} |e_k\rangle = \left[U (U^t)^{-1} \right]_{ki} |e_k\rangle \end{aligned} \quad (2.180)$$

D'altronde sappiamo per la (2.177) che T^2 è diagonale e se indichiamo con D la matrice diagonale che lo rappresenta, i.e. (non sommato sugli indici ripetuti ...)

$$D_{ij} = \delta_{ij} e^{i\eta_j} \quad (2.181)$$

allora

$$U (U^t)^{-1} = D \quad \Rightarrow \quad U = D U^t \quad (2.182)$$

e prendendo la trasposta di entrambi i membri

$$U^t = U D \quad (2.183)$$

e quindi, sostituendo nella (2.182)

$$U = D U D \quad (2.184)$$

Questo significa dunque che

$$U_{ij} = \sum_{k,n} D_{ik} U_{kn} D_{nj} = \sum_{k,n} e^{i\eta_i} \delta_{ik} U_{kn} \delta_{nj} e^{i\eta_j} = U_{ij} e^{i(\eta_i + \eta_j)} \quad (2.185)$$

ovvero, facendo $i = j$, che

$$e^{i\eta_i} = \pm 1 \quad (2.186)$$

e quindi, considerando $i \neq j$, che

$$\forall i : e^{i\eta_i} = e^{i\eta} = \pm 1 \quad (2.187)$$

Dunque $D \equiv T^2$ deve essere multipla dell'identità ed i valori³⁹ possibili di T^2 in un dato spazio di Hilbert di stati, cioè per un sistema fisico assegnato, possono essere soltanto ± 1 .

Per capire meglio il significato fisico di questo risultato, vediamone il legame con lo spin.

Iniziamo considerando un sistema con spin intero S e siano $|S, m\rangle$ gli autostati di S_z per l'autovalore m . Siccome $T S_z = -S_z T$, ne segue che deve essere⁴⁰

$$T |S, m\rangle = e^{i\phi(m)} |S, -m\rangle \quad (2.188)$$

D'altronde esiste lo stato di momento angolare nullo, per il quale deve, evidentemente, essere

$$T |S, 0\rangle = e^{i\phi} |S, 0\rangle \quad (2.189)$$

Ma siccome T è antiunitario, allora, applicandolo ancora una volta, avremo

$$T (T |S, 0\rangle) = e^{-i\phi} T |S, 0\rangle = e^{-i\phi} e^{i\phi} |S, 0\rangle = |S, 0\rangle \quad (2.190)$$

ovvero

$$T^2 |S, 0\rangle = |S, 0\rangle \quad (2.191)$$

Dunque, per quanto già detto, su tutti gli stati del sistema sovrapponibili con quello considerato deve essere $T^2 = 1$, i.e. i sistemi con spin intero sono tutti caratterizzati dal fatto che, su di essi

$$T^2 = I \quad (2.192)$$

³⁹Questa conclusione non è valida per operatori unitari come P e C , per i quali, a priori, nulla vieta che $P^2 = e^{i\alpha}$ e $C^2 = e^{i\beta}$. Resta comunque vero che, dato il principio di sovrapposizione lineare, per tutti questi operatori P, C, T il fattore di fase è unico per tutti i vettori dello spazio di Hilbert (a meno di regole di superselezione). Come abbiamo già avuto modo di dire, questo fatto consente, nel caso degli operatori unitari P e C , di riassorbire l'eventuale fattore di fase presente nel loro quadrato, in modo che risulti comunque $P^2 = C^2 = I$.

Per il suo carattere antiunitario, questo non è possibile per T , infatti, anche ponendo $T' = e^{i\phi} T$, risulta comunque che $(T')^2 = T^2$!

⁴⁰Questa conclusione discende, in realtà, dal fatto che T commuta con S^2 , per cui i sottospazi con S fissato sono T -invarianti.

Veniamo ora ai sistemi con spin semidispari.

Ovviamente, l'argomento usato prima non si può più usare perché non esiste l'autostato con $m = 0$.

Iniziamo dunque dal caso già studiato di spin $1/2$.

Si è visto che, definita la matrice R attraverso la (2.175), è

$$T = R K \quad \Rightarrow \quad T^2 = R (R^t)^{-1} \quad (2.193)$$

Ma R , nel caso considerato, è reale, dunque, essendo unitaria, è tale che $(R^t)^{-1} = (R^+)^{-1} = R$, e dunque

$$T^2 = R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv -I \quad (2.194)$$

Questo risultato, come mostreremo adesso, è del tutto generale: nel caso di spin semidispari risulta necessariamente che $T^2 = -I$, per cui, vista la conclusione opposta a cui siamo giunti per gli spin interi, evidentemente l'operatore T^2 discrimina i fermioni dai bosoni !

Veniamo alla dimostrazione generale.

Consideriamo un sistema con momento angolare S qualsiasi (intero o semidispari) e siano $|S, m\rangle$ gli autostati simultanei di S^2 e di S_z .

La (usuale) convenzione⁴¹ di fase fatta è tale per cui ($\hbar = 1$)

$$S_z |S, m\rangle = m |S, m\rangle \quad (2.195)$$

$$S_+ |S, m\rangle = \sqrt{(S-m)(S+m+1)} |S, m+1\rangle \quad (2.196)$$

$$S_- |S, m\rangle = \sqrt{(S+m)(S-m+1)} |S, m-1\rangle \quad (2.197)$$

dove

$$S_{\pm} = S_x \pm i S_y \quad \Rightarrow \quad S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}; \quad S_y = -i \frac{S_+ - S_-}{2} \quad (2.198)$$

E' evidente, allora, che, così come nel caso di spin $1/2$, gli operatori S_z e S_x sono rappresentati da matrici reali, mentre S_y è rappresentato da una matrice immaginaria pura.

L'operatore T , che anticommuta con \vec{S} , non può quindi essere rappresentato solo dall'operatore K , ma occorre, in generale, che questa sia accompagnata anche da una opportuna trasformazione unitaria che anticommuti con S_x e S_z e commuti invece con S_y .

Giungiamo così, in generale, alla conclusione già tratta nel caso dello spin $1/2$, ovvero che, in presenza di qualsivoglia spin, la trasformazione U che, insieme a K , descrive l'inversione temporale, è una rotazione di π intorno all'asse y , i.e.

$$T = U K; \quad U = e^{i\pi S_y} \quad (2.199)$$

⁴¹Si tratta della convenzione seguita, per esempio, da
L. Landau, E. Lifchitz: *Mécanique Quantique*, ed. MIR 1974, pag 110

D'altronde, essendo S_y immaginario puro, U è reale, per cui

$$T^2 = U K U K = U U K K = U U = e^{2i\pi S_y} \quad (2.200)$$

quindi, nella base considerata, T^2 è *sempre* una rotazione di 2π intorno all'asse y . Solo che, nel caso degli spin interi, questa rotazione è semplicemente l'identità I , mentre per gli spin semidispari, come sappiamo, essa vale $-I$ (nel gruppo $SU(2)$ è la rotazione di 4π che torna ad essere l'identità ...).

Veniamo infine ad un'ultima conseguenza che si ha per i sistemi caratterizzati dall'avere $T^2 = -1$.

Supponiamo di avere un sistema per cui $T^2 = -I$ ed assumiamo che l'inversione temporale sia una simmetria conservata. Indichiamo con $|E\rangle$ un generico autostato dell'hamiltoniana. Siccome T è conservata, l'operatore T commuta con l'hamiltoniana e quindi anche

$$|E_{(T)}\rangle \equiv T |E\rangle \quad (2.201)$$

è autostato dell'hamiltoniana per lo stesso autovalore E . Si ha

$$\begin{aligned} \langle E | E_{(T)} \rangle &\equiv \langle E | T E \rangle = \langle T E | E \rangle^* = \langle T T E | T E \rangle = \\ &= - \langle E | T E \rangle \equiv - \langle E | E_{(T)} \rangle \end{aligned} \quad (2.202)$$

dove le prime due uguaglianze sono ovvie, la terza proviene dall'antiunitarietà di T e l'ultima dal fatto che, per ipotesi, $T^2 = -I$.

La relazione ottenuta mostra chiaramente che gli stati $|E\rangle$ ed $|E^T\rangle$ sono necessariamente ortogonali fra loro e quindi che descrivono stati diversi⁴².

Si tratta della cosiddetta *degenerazione di Kramers* e vale, per quanto visto, solo per sistemi con spin semidispari.

⁴²Il risultato ottenuto implica che, se $T^2 = -I$ allora l'hamiltoniana non può costituire, da sola, un set completo di osservabili. Il sistema deve possedere anche un qualche grado di libertà che viene cambiato da T , in modo da produrre la degenerazione: solitamente (ma non è sempre così) questo grado di libertà è la componente z dello spin.

2.1.6 Il momento di dipolo elettrico, la parità e l'inversione temporale

Consideriamo un sistema fisico come, per esempio, quello di una particella elementare, un atomo, una molecola, etc ... che sia posto in un campo elettrico esterno "debole". L'energia del sistema, in funzione del campo elettrico, potrà essere scritta come

$$\mathcal{E} = qV + \vec{d} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} Q_{ij} E_i E_j + \dots \quad (2.203)$$

dove V ed E_i sono calcolati nel punto dove si trova il sistema di carica q , momento di dipolo elettrico (EDM) \vec{d} , momento di quadrupolo Q ,

Il momento di dipolo \vec{d} , come è ben noto dall'elettrodinamica classica, è una misura della polarizzazione della carica nel sistema, preesistente all'applicazione del campo elettrico esterno. Risulta infatti

$$\vec{d} = \sum e_i \vec{r}_i \quad (2.204)$$

ed esso è indipendente dalla scelta del sistema di coordinate se il sistema fisico considerato è globalmente neutro ($q = 0$).

Supponiamo adesso che la parità P sia una simmetria conservata nel sistema fisico considerato, i.e. che

$$[P, H] = 0 \quad (2.205)$$

Gli stati stazionari possono allora essere scelti in modo che siano anche auto-stati della parità e, se il sistema è *non presenta degenerazione accidentale* (oltre a quella eventualmente legata al momento angolare⁴³), allora ad ogni autovalore dell'hamiltoniana corrispondono autostati di parità definita, eventualmente degeneri in J_z . Anche lo stato fondamentale avrà dunque parità definita, per cui

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \vec{d} | \psi_0 \rangle &= \langle \psi_0 | P^\dagger P \vec{d} P^\dagger P | \psi_0 \rangle = \langle P \psi_0 | P \vec{d} P^{-1} | P \psi_0 \rangle = \\ &= \langle \psi_0 | P \vec{d} P^{-1} | \psi_0 \rangle = - \langle \psi_0 | \vec{d} | \psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (2.206)$$

ovvero il suo momento di dipolo⁴⁴ dovrà essere nullo⁴⁵.

Questo argomento fu usato per verificare la conservazione della parità nelle in-

⁴³Se il sistema è invariante per rotazioni (e siamo in assenza di spin) H , J^2 e J_z costituiscono un set completo di osservabili che commutano. Siccome il momento angolare commuta a sua volta con la parità, se non ci sono degenerazioni accidentali, ciascun multipletto *deve* avere parità definita.

⁴⁴Abbiamo qui usato il fatto che ψ_0 ha parità definita e che $P \vec{d} P^{-1} = P^{-1} \vec{d} P = -\vec{d}$. Chiaramente infatti, data la definizione (2.204), assumendo che la carica elettrica sia uno scalare per parità, il momento di dipolo risulta essere un operatore vettoriale e dunque deve anticommutare con P , così come \vec{r} .

⁴⁵Si noti che questo argomento vale non solo per lo stato fondamentale ma anche per qualunque altro autostato dell'hamiltoniana, visto che discende unicamente dal fatto che esso ha, necessariamente, parità definita, per l'ipotesi di assenza di degenerazione accidentale.

terazioni forti, misurando l'eventuale EDM del neutrone⁴⁶.

Fu però osservato successivamente da Landau⁴⁷ che un eventuale valore non nullo dell' EDM di un sistema elementare non degenerare libero richiedeva anche la violazione di T . Vediamo perché.

Nel caso di un sistema con momento angolare complessivo J intero (e quindi con spin S intero ...), la degenerazione di Kramers non è presente e, se il sistema non presenta alcuna degenerazione accidentale, allora una base dello spazio di Hilbert degli stati del sistema potrà essere costituita da autostati simultanei dell'hamiltoniana, di J^2 e di J_z , i.e. potrà essere data nella forma⁴⁸

$$|E_J, J, m\rangle \quad (2.207)$$

dove, per l'ipotesi sulla non esistenza di alcuna degenerazione accidentale, fissato E_J , J risulta a sua volta univocamente determinato.

In questo caso, se T è una simmetria conservata e dunque commuta con H , allora lo stato $T|E_J, J, m\rangle$ deve appartenere al multipletto corrispondente all'energia E_J e, per quanto già osservato, è evidente che dovrà essere

$$T|E_J, J, m\rangle = U_{-mm}|E_J, J, -m\rangle \quad (2.208)$$

dove la matrice unitaria U risulta essere, come sappiamo, semplicemente la rotazione di π intorno all'asse y , i.e.

$$U = e^{i\pi J_y} \quad (2.209)$$

Veniamo ora al momento di dipolo elettrico. Poiché \vec{d} è un vettore, per il

⁴⁶Nell'articolo sottocitato, gli autori considerano la possibilità che il nucleone possa avere un momento di dipolo elettrico, data la scarsa conoscenza che si aveva a quel tempo (1950) delle interazioni forti e delle loro proprietà.

E.M. Purcell, N.F. Ramsey: *On the possibility of electric dipole moment for elementary particles and nuclei* Phys. Rev. 78, 807, (1950)

Usando la tecnica della risonanza magnetica applicata ad un fascio di neutroni polarizzati, essi raggiunsero la precisione di $5 \cdot 10^{-20} e \cdot cm$, come risulta dalla loro successiva pubblicazione

J.H. Smith, E.M. Purcell, N.F. Ramsey: *Experimental limit to the electric dipole moment of the neutron* Phys. Rev. 108, 120, (1957)

Ad oggi, la precisione raggiunta nella misura del momento di dipolo elettrico del neutrone con la tecnica *NMR* applicata all'atomo di ^{199}Hg ($I = 1/2$) è di $\approx 10^{-25} e \cdot cm$ (cfr. R. Galub, S.K. Lamoreaux: *Neutron electric dipole moment, ultracold neutrons and polarized 3He*)

Phys. Rep. 237, 1, (1994)

ed esistono esperimenti in corso che dovrebbero giungere a sensibilità intorno a $10^{-28} e \cdot cm$.

⁴⁷L. Landau; *On the conservation laws in weak interactions*

Nucl. Phys. 3, 127 (1957)

⁴⁸Nel caso di spin semidispari, la degenerazione di Kramers, comunque, non altera il discorso che stiamo facendo perché, siccome T commuta con J^2 come si è già avuto modo di osservare, T non può far uscire dal multipletto.

teorema⁴⁹ di Wigner-Eckart risulta allora che⁵⁰

$$\langle E_J, J, m | \vec{d} | E_J, J, m \rangle = C(E_J) \langle J, m | \vec{J} | J, m \rangle \quad (2.212)$$

da cui ne segue quindi, per esempio, che è

$$\langle E_J, J, m | d_z | E_J, J, m \rangle = C(E_J) \langle J, m | J_z | J, m \rangle = m C(E_J) \quad (2.213)$$

Riguardo a T , abbiamo già detto che risulta

$$T | E_J, J, m \rangle = U_{-m} | E_J, J, -m \rangle \quad (2.214)$$

D'altronde, evidentemente è

$$\langle E_J, J, m | d_z | E_J, J, m \rangle = \langle E_J, J, m | T^{-1} T d_z T^{-1} T | E_J, J, m \rangle \quad (2.215)$$

ma, per la (2.143) e la definizione (2.203), risulta

$$T^{-1} \vec{d} T = \vec{d} \Leftrightarrow T \vec{d} T^{-1} = \vec{d} \Rightarrow T d_z T^{-1} = d_z \quad (2.216)$$

quindi

$$\begin{aligned} \langle E_J, J, m | d_z | E_J, J, m \rangle &= \langle E_J, J, m | T^{-1} d_z T | E_J, J, m \rangle \equiv \\ &\equiv \langle E_J, J, m | T^{-1} d_z T (E_J, J, m) \rangle = \\ &= \langle T^{-1} T (E_J, J, m) | T^{-1} d_z T (E_J, J, m) \rangle \end{aligned}$$

⁴⁹Ricordiamo che il teorema di Wigner-Eckart stabilisce che, se O_k^L è la componente k di un operatore tensoriale (per rotazioni) di ordine L , allora, su stati che siano anche autostati di J^2 e di J_z , risulta in generale che, in termini del coefficiente di Clebsch-Gordan $\langle J', m' | L, J; k, m \rangle$, si ha

$$\langle J', m', \alpha' | O_k^L | J, m, \alpha \rangle = \langle J', \alpha' | O | J, \alpha \rangle \langle J', m' | L, J; k, m \rangle \quad (2.210)$$

dove $\langle J', \alpha' | O | J, \alpha \rangle$ viene detto *elemento di matrice ridotto*.

Per un operatore vettoriale in particolare, questa relazione può essere riscritta, *all'interno dello stesso multipletto*, più semplicemente come

$$\langle J, m', \alpha | \vec{V} | J, m, \alpha \rangle = C(\alpha, J) \langle J, m' | \vec{J} | J, m \rangle \quad (2.211)$$

dove $C(\alpha, J)$ è il rapporto fra l'elemento di matrice ridotto definito sopra per l'operatore \vec{V} e quello per \vec{J} (certamente non nullo in multipletti in cui $J \neq 0$: se $J = 0$, comunque, la relazione resta valida in quanto sia \vec{V} che \vec{J} hanno comunque solo elementi di matrice solo nulli).

Si osservi che la *proporzionalità* fra \vec{V} e \vec{J} esiste solo e soltanto all'interno di uno stesso multipletto (e la costante può dipendere dal multipletto stesso ...).

Nel caso di multipletti con J differente, mentre può accadere che \vec{V} abbia elementi di matrice e quindi che $\langle J', \alpha' | V | J, \alpha \rangle \neq 0$, è certo che \vec{J} non può averne perché esso commuta con J^2 e dunque, se $J \neq J'$ o $\alpha \neq \alpha' \Rightarrow \langle J', \alpha' | J | J, \alpha \rangle = 0$!

⁵⁰Siccome per ipotesi il sistema non possiede degenerazione accidentale, questo implica che E_J determina univocamente J per cui è inutile precisare formalmente la dipendenza della costante C anche dall'autovalore di J .

ovvero, tenendo conto che T e quindi T^{-1} sono antiunitari ed usando la (2.208), abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle E_J, J, m | d_z | E_J, J, m \rangle &= \langle T(E_J, J, m) | d_z T(E_J, J, m) \rangle^* = \\
&= \langle U_{-m m}(E_J, J, -m) | d_z U_{-m m}(E_J, J, -m) \rangle^* = \\
&= |U_{-m m}|^2 \langle E_J, J, -m | d_z | E_J, J, -m \rangle^* \quad (2.217)
\end{aligned}$$

ma d_z è un operatore hermitiano, quindi

$$\langle E_J, J, -m | d_z | E_J, J, -m \rangle^* = \langle E_J, J, -m | d_z | E_J, J, -m \rangle$$

e dunque

$$\langle E_J, J, m | d_z | E_J, J, m \rangle = |U_{-m m}|^2 \langle E_J, J, -m | d_z | E_J, J, -m \rangle$$

relazione che, evidentemente, non può essere in accordo con la (2.213) senza che $C(E_J) = 0$, visto che essa fornisce la relazione

$$m C(E_J) = -m |U_{-m m}|^2 C(E_J) \quad (2.218)$$

Questo significa che, su un qualunque autostato dell'hamiltoniana T -invariante di un sistema che non presenta degenerazione accidentale, il momento di dipolo elettrico (EDM) \vec{d} di quello stato deve avere valore medio nullo.

In particolare, questa conclusione è vera, ovviamente, per lo stato fondamentale del sistema in esame.

Ma significa questo che nessun sistema può mai avere un EDM non nullo senza che T sia violata? Dopo tutto, sappiamo, per esempio, che certe molecole, come quella dell'acqua, sono polari ...

La questione sta nell'assenza di degenerazione accidentale, ovvero nel fatto che il sistema non possieda un'altra direzione intrinseca indipendente da quella definita dal momento angolare.

Se questo accade, la conclusione per cui la presenza di un momento di dipolo elettrico non nullo implica violazione di T non è più corretta.

Un caso particolarmente istruttivo è quello dello stesso atomo di idrogeno. La teoria non relativistica dell'atomo di idrogeno senza spin prevede infatti, come è ben noto, che tutti gli stati con lo stesso numero quantico principale n siano degeneri fra loro e quindi che esistano, a parte il caso $n = 1$, multipletti corrispondenti a un diverso valore del momento angolare J , da $J = 0$ a $J = n - 1$, aventi tutti la stessa energia.

Questo implica che l'atomo possieda sul generico autostato $|n_1, n_2, m\rangle$ (coordinate paraboliche⁵¹, lungo z) un momento di dipolo elettrico

$$d_z = \frac{3}{2} n(n_1 - n_2) |e| \frac{\hbar^2}{m e^2} = \frac{3}{2} n(n_1 - n_2) |e| \frac{\lambda_c}{\alpha} \quad (2.223)$$

dove n_1 ed n_2 sono interi non negativi legati al numero quantico principale⁵² n ed all'autovalore m di J_z dalla relazione⁵³

$$n = n_1 + n_2 + 1 + |m| \quad (2.224)$$

ed abbiamo indicato, come è consuetudine, con λ_c la lunghezza d'onda Compton ridotta dell'elettrone e con α la costante di struttura fina.

Questo EDM non nullo, ovviamente, non implica alcuna violazione né di T né di P , visto che c'è degenerazione accidentale.

Questa degenerazione accidentale discende dal fatto che, nel caso del potenziale coulombiano $V(\vec{r}) = -k/r$, esiste un altro vettore conservato, indipendente da \vec{J} , che è il vettore di Runge-Lenz, il quale classicamente, è dato da

$$\vec{A} = \frac{1}{m} \vec{P} \times \vec{J} - k \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.225)$$

⁵¹L'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno è separabile anche in coordinate paraboliche, la cui definizione è la seguente:

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos\phi \quad (2.219)$$

$$y = \sqrt{\xi\eta} \sin\phi \quad (2.220)$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \quad (2.221)$$

per cui

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad (2.222)$$

⁵²Fissato n , i possibili valori di $|m|$ vanno da 0 a $n - 1$. Fissati n e $|m|$, data la (2.224) n_1 può assumere tutti i valori che vanno da 0 a $n - |m| - 1$, ovvero può assumere $n - |m|$ valori differenti, dopodichè n_2 , invece, è univocamente fissato. Tenendo conto che per ogni $m > 0$ esiste un corrispondente $m < 0$, ecco che gli stati $|n_1, n_2, m\rangle$ con n fissato sono

$$2 \sum_{m=1}^{n-1} (n - m) + (n - 0)$$

dove l'ultimo addendo corrisponde ad $m = 0$. Risulta quindi

$$2 \sum_{m=1}^{n-1} (n - m) + (n - 0) = 2n(n - 1) - n(n - 1) + n = n^2$$

che rappresenta, come sappiamo, la degenerazione del livello n dell'atomo di idrogeno.

⁵³Cfr. L.Landau E. Lifchitz: *Mécanique Quantique* Ed. Mir, 1967, pagg. 153 e successive e pagg. 319 e successive.

Quantisticamente⁵⁴ ciascuna di queste componenti commuta⁵⁵ con la sua omologa componente di \vec{J} , ma non con J^2 , e le tre componenti A_i non commutano⁵⁶ fra loro. L'esistenza di questa osservabile conservata che non commuta con J^2 implica l'esistenza di una degenerazione ulteriore dei livelli energetici, oltre a quella legata a J_z , che è detta, appunto, *accidentale* nel senso che la sua esistenza è direttamente legata al fatto che il potenziale è coulombiano.

La base consueta (coordinate sferiche) $|n, J, m\rangle$ usata per descrivere gli autostati dell'atomo di idrogeno è fatta, come ben noto, da stati in cui, oltre all'energia, sono diagonali anche J^2 e J_z , mentre la base $|n_1, n_2, m\rangle$ sopra citata è fatta da stati dove, oltre all'energia, sono diagonali J_z ed A_z , i cui autovalori sono proporzionali a $\frac{n_2 - n_1}{n}$.

L'osservabile \vec{d} , nel supermultipletto definito dal numero quantico principale n , invece che essere parallela a \vec{J} come accadrebbe se non ci fosse alcuna degenerazione accidentale (con le conseguenze viste sopra circa $\langle |\vec{d}| \rangle$, dovute, in buona sostanza al fatto che T e \vec{J} anticommutano mentre T e \vec{d} commutano), risulta in questo caso parallela ad \vec{A} (senza conseguenze su $\langle |\vec{d}| \rangle$, visto che anche T ed \vec{A} commutano), infatti si dimostra che risulta⁵⁷

$$\langle |\vec{d}| \rangle = c(n) \langle |\vec{A}| \rangle \quad (2.229)$$

Questo per quanto riguarda T .

⁵⁴Siccome \vec{P} e \vec{J} non commutano fra loro, la definizione quantistica, che rende altresì l'operatore \vec{A} hermitiano, è la seguente

$$A_i = \frac{1}{2m} \epsilon_{ijk} (P_j J_k + J_k P_j) - k \frac{r_i}{r} \quad (2.226)$$

⁵⁵ \vec{A} è un operatore vettoriale per rotazioni, dunque tale che ($\hbar = 1$)

$$[J_j, A_k] = i \epsilon_{jkn} A_n \quad (2.227)$$

Essendo \vec{A} un vettore polare, esso anticommuta con la parità e dunque non può avere elementi di matrice diversi da zero fra stati all'interno di uno stesso multipletto (stati aventi la stessa parità ...) mentre può avere elementi di matrice fra multipletti diversi, degeneri in energia (solo con $|\Delta J| = 1$, essendo l'operatore \vec{A} di spin 1 ...).

⁵⁶Come mostrato in

A. Bohm: *Quantum mechanics: foundations and applications*, III edition, 1993, Springer, Ch. VI opportunamente rinormalizzati ($A_i \rightarrow \hat{A}_i = -A_i / \sqrt{-2H/m}$, dove H è hamiltoniana del sistema di massa m), il commutatore degli \hat{A}_j riproduce le componenti del momento angolare, i.e.

$$[\hat{A}_j, \hat{A}_k] = i \epsilon_{jkn} J_n \quad (2.228)$$

e questo implica che il gruppo di invarianza dell'hamiltoniana relativa al potenziale coulombiano è più esteso del solo gruppo delle rotazioni e coincide in effetti con $SO(4)$.

⁵⁷Le due osservabili \vec{d} ed \vec{A} non sono proporzionali poiché la costante che le lega è funzione dell'energia (dipende infatti da n^2 ...).

Torniamo infine al legame fra EDM e parità, da cui eravamo partiti. Siccome A_z non commuta con J^2 bensì ha elementi di matrice fra stati con $|\Delta J| = 1$, gli stati⁵⁸ $|n_1, n_2, m\rangle$ sono, in generale, combinazioni lineari di stati con lo stesso autovalore di J_z (ovvio!), ma appartenenti a multipletti differenti, corrispondenti allo stesso numero quantico principale n . Questo implica in particolare che essi non abbiano parità definita, per cui, l'esistenza di un EDM non nullo su questi autostati dell'hamiltoniana, non implica, evidentemente, alcuna violazione di P nella dinamica!

⁵⁸Giusto per completezza, osserviamo che se consideriamo, per esempio, il primo livello eccitato ($n = 2$), allora, nella base $|n_1, n_2, m\rangle$ i quattro stati degeneri, espressi come combinazione degli stati nella base più consueta $|n, L, m\rangle$, sono dati da

$$|1, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0, 0\rangle + |2, 1, 0\rangle) \quad (2.230)$$

$$|0, 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0, 0\rangle - |2, 1, 0\rangle) \quad (2.231)$$

$$|0, 0, 1\rangle = |2, 1, 1\rangle \quad (2.232)$$

$$|0, 0, -1\rangle = |2, 1, -1\rangle \quad (2.233)$$

ed è allora del tutto evidente come d_z possa avere valor medio non nullo sugli stati $|1, 0, 0\rangle$ e $|0, 1, 0\rangle$ visto che la funzione d'onda di $|2, 0, 0\rangle$ ha simmetria sferica, mentre quella di $|2, 1, 0\rangle$ è proporzionale a z .

Si osservi infine che entrambe le funzioni d'onda possono essere scelte reali, per cui gli stati $|1, 0, 0\rangle$ e $|0, 1, 0\rangle$ risultano entrambi T-invarianti come tanto \vec{A} che $\vec{d} \dots$

2.1.7 Una curiosità: il vettore di Runge-Lenz

Classicamente, nel caso del moto di un punto materiale di massa m in un campo coulombiano o newtoniano, fra le grandezze fisiche conservate c'è, come è noto, il vettore assiale del momento angolare⁵⁹

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \equiv m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

e, oltre a questo, il cosiddetto vettore (polare) di *Runge-Lenz* \vec{M} . Se l'hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

allora il vettore di Runge-Lenz è definito come

$$\vec{A} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} - k \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.234)$$

Esso, come vedremo, individua *la direzione dell'asse fuoco-direttrice, nel verso del perielio*.

Iniziamo provando che \vec{A} è davvero una costante del moto. Ricordiamo a questo proposito che \vec{L} è indipendente dal tempo, per cui

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} \quad (2.235)$$

ma, per la seconda legge della dinamica si ha che

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \frac{k}{r^3} (-\vec{r}) \quad (2.236)$$

dunque

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} \right) = -\frac{k}{mr^3} \vec{r} \times \vec{L} = -\frac{k}{mr^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})) = -\frac{k}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

D'altronde, risultando evidentemente

$$\vec{r} = r \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{n} + r \dot{\vec{n}} \quad (2.237)$$

si ha che

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times (r \dot{\vec{n}}) = r (\vec{r} \times \dot{\vec{n}}) \quad (2.238)$$

⁵⁹Questo è dovuto al carattere centrale della forza, i.e. al fatto che $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{n}$, dove $\vec{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$, infatti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{dt} = m \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = f(r) \vec{r} \times \vec{n} = 0$$

per cui ne segue che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} \right) = -\frac{k}{r^2} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{n}}) = -\frac{k}{r^2} [\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{n}}) - \dot{\vec{n}} r^2] \quad (2.239)$$

D'altronde, essendo

$$n^2 = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{n}} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{n}} \cdot \vec{r} = 0$$

e quindi, finalmente, si ha

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} \right) = k \dot{\vec{n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{L} - k \vec{n} \right) = 0 \quad (2.240)$$

che prova appunto il fatto che il vettore di Runge-Lenz sia una costante del moto.

Vediamo ora come da questa legge di conservazione si possa dedurre che la traiettoria percorsa dal punto materiale deve essere una conica.

Moltiplichiamo scalarmente il vettore \vec{A} per la coordinata radiale \vec{r} : si ha

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{1}{m} (\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - k r \quad \Rightarrow \quad A r \cos \theta = (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - k r \quad (2.241)$$

dove l'angolo θ è l'angolo fra \vec{r} e \vec{A} . Ricordiamo adesso l'identità vettoriale

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

per cui risulta che

$$(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{L} = \frac{1}{m} |\vec{L}|^2 \equiv \frac{l^2}{m}$$

dove abbiamo indicato con l il modulo (costante) del momento angolare della particella. Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} A r \cos \theta &= \frac{l^2}{m} - k r \quad \Rightarrow \quad r (A \cos \theta + k) = \frac{l^2}{m} \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{r} &= \frac{k m}{l^2} + \frac{A m}{l^2} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.242)$$

che è appunto l'equazione di una conica di eccentricità

$$\epsilon = \frac{\frac{A m}{l^2}}{\frac{k m}{l^2}} = \frac{A}{|k|} \quad (2.243)$$

Nel caso di potenziale attrattivo ($k > 0$) e nel caso particolare di un sistema legato, come è noto la traiettoria è un'ellisse.

Vediamo, in questo caso, come è fatto il vettore \vec{A} .

Senza perdita di generalità, visto che il moto è piano data la costanza di \vec{L} a cui il vettore posizione è ovviamente sempre ortogonale, possiamo supporre che esso avvenga nel piano (x, y) . Poniamo allora

$$\vec{r} = r (\cos\phi, \sin\phi, 0) \quad (2.244)$$

e dunque

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} (\cos\phi, \sin\phi, 0) + r \dot{\phi} (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \quad (2.245)$$

da cui

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m r^2 \dot{\phi} (0, 0, 1) \equiv (0, 0, l) \quad (2.246)$$

Veniamo ora al calcolo esplicito di \vec{A} : dalla definizione si ha

$$\vec{A} = \frac{1}{m} \vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p}) - k \vec{n} = \frac{p^2}{m} \vec{r} - \frac{1}{m} \vec{p} (\vec{r} \cdot \vec{p}) - k \vec{n} \quad (2.247)$$

ma per determinare il vettore, essendo costante durante il moto, basta calcolarlo in un punto qualsiasi dell'orbita. Osserviamo allora che, essendo

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = m \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = m r \dot{r}$$

il secondo addendo nell'espressione (2.246) è nullo sia al perielio che all'afelio, dove $\dot{r} = 0$. In ciascuno di questi due punti, quindi, l'espressione del vettore di Runge-Lenz si semplifica in

$$\vec{A} = \frac{p^2}{m} \vec{r} - \frac{1}{m} \vec{p} (\vec{r} \cdot \vec{p}) - k \vec{n} \Rightarrow A = \frac{p^2}{m} r - k = \vec{n} \left(r \frac{p^2}{m} - k \right) \quad (2.248)$$

D'altronde l'energia totale E della particella è anch'essa una costante del moto e vale

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

per cui ne segue che

$$2r E = r \frac{p^2}{m} - 2k \quad (2.249)$$

da cui, sempre solo al perielio e all'afelio, è

$$\vec{A} = (2rE + k) \vec{n} \quad (2.250)$$

Ma in un moto kepleriano l'energia totale E risulta

$$E = -\frac{k}{d}$$

dove d è la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse per cui, detti a e b ($a > b$), rispettivamente, la distanza dell'afelio e del perielio dall'origine (fuoco dell'ellisse), risulta

$$E = -\frac{k}{a+b} \quad (2.251)$$

per cui risulta

$$afelio : \vec{A} = \vec{n}_a \left(2a \frac{-k}{a+b} + k \right) = \frac{k(b-a)}{a+b} \vec{n}_a = |E|(b-a)\vec{n}_a \quad (2.252)$$

$$perielio : \vec{A} = \vec{n}_b \left(2b \frac{-k}{a+b} + k \right) = \frac{k(a-b)}{a+b} \vec{n}_b = |E|(a-b)\vec{n}_b \quad (2.253)$$

ed evidentemente i due risultati, come devono, sono coincidenti visto che $\vec{n}_a = -\vec{n}_b$.

Concludendo, il vettore di Runge-Lenz classico (vedi fig.3) ha per modulo il prodotto del valore assoluto dell'energia totale per la differenza afelio-perielio, ha per direzione quella dell'asse dell'ellisse e verso quello che va dal fuoco al perielio.

L'interesse per questo vettore sta nel fatto che, come sappiamo, esso è, per esempio, all'origine della degenerazione accidentale dei livelli nell'atomo di idrogeno (trattazione non relativistica, senza spin), per la quale l'energia dipende solo dal numero quantico principale n e sono degeneri tutti i livelli con $J = 0, \dots, n-1$.

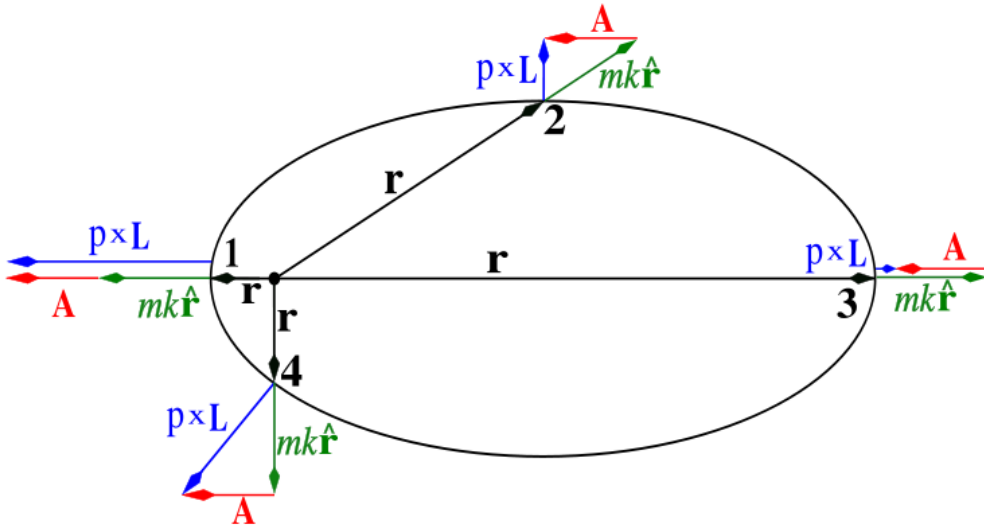


Figure 3: *Vettore di Runge Lenz*

2.2 La seconda quantizzazione

Affrontiamo adesso il problema della quantizzazione dei campi.

2.2.1 Il campo scalare libero

L'evoluzione libera del campo⁶⁰ scalare⁶¹ carico di massa m , come sappiamo, è retta dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) - m^2 \phi \phi^\dagger \quad (2.258)$$

da cui ricaviamo appunto l'equazione di Klein-Gordon sia per ϕ che per ϕ^\dagger (considerati indipendenti)

$$\square \phi + m^2 \phi = 0; \quad \square \phi^\dagger + m^2 \phi^\dagger = 0; \quad (2.259)$$

Per effettuarne la quantizzazione, il campo scalare (complesso) $\phi(x)$ viene espanso in termini di operatori di *creazione/distruzione* di singola particella⁶² nel modo seguente:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (2.262)$$

⁶⁰Ricordiamo di nuovo che in Teoria Quantistica dei Campi (*QFT*), i campi non sono più delle funzioni, bensì sono *operatori* che agiscono nello spazio di Hilbert degli stati del sistema.

⁶¹Per un campo scalare, la legge di trasformazione sotto il gruppo di Poincaré è la seguente

$$(a, \Lambda) : \quad x \rightarrow x' = a + \Lambda x \quad (2.254)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) \quad (2.255)$$

e l'azione sul campo scalare ϕ degli operatori $U(a, \Lambda)$ della rappresentazione unitaria del gruppo di Poincaré definita sullo spazio di Hilbert degli stati del sistema è, per definizione, la seguente

$$U^{-1}(a, \Lambda) \phi(x) U(a, \Lambda) = \phi'(x) \equiv \phi(\Lambda^{-1}(x - a)) \quad (2.256)$$

dove la seconda uguaglianza discende dalla (2.255).

Equivalentemente risulta

$$U(a, \Lambda) \phi(x) U^{-1}(a, \Lambda) = \phi(\Lambda x + a) \quad (2.257)$$

Si noti che, mentre la (2.257) descrive l'effetto della trasformazione quando la si pensi effettuata sul sistema di riferimento (trasformazione passiva), la (2.255), equivalente alla (2.256), descrive la corrispondente trasformazione sul campo (trasformazione attiva).

⁶²Coerentemente con la (2.256) e la (2.257), l'azione degli operatori unitari $U(a, \Lambda)$ sugli operatori di creazione e distruzione $a(\vec{p})$, $a^\dagger(\vec{p})$, $b(\vec{p})$ e $b^\dagger(\vec{p})$ è la seguente:

$$U^{-1}(a, \Lambda) c(\vec{p}) U(a, \Lambda) = e^{ia \cdot p} c(\Lambda^{-1} \vec{p}); \quad U(a, \Lambda) c(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{-ia \cdot \Lambda p} c(\vec{\Lambda p}) \quad (2.260)$$

$$U^{-1}(a, \Lambda) c^\dagger(\vec{p}) U(a, \Lambda) = e^{-ia \cdot p} c^\dagger(\Lambda^{-1} \vec{p}); \quad U(a, \Lambda) c^\dagger(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{ia \cdot \Lambda p} c^\dagger(\vec{\Lambda p}) \quad (2.261)$$

dove c sta per a oppure b e analogamente c^\dagger per a^\dagger o b^\dagger , mentre $\vec{\Lambda p}$ indica concisamente la parte spaziale del quadrivettore $\Lambda(\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$, essendo m la massa del campo.

da cui

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{b(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}\} \quad (2.263)$$

dove

- p è il quadrimpulso della particella/antiparticella: $p \equiv (E_p, \vec{p}) \equiv (\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$;
- $a(\vec{p})$ annichila la particella di quadrimpulso (E_p, \vec{p}) ;
- $a^\dagger(\vec{p})$ crea la particella di quadrimpulso (E_p, \vec{p}) ;
- $b(\vec{p})$ annichila l'antiparticella di quadrimpulso (E_p, \vec{p}) ;
- $b^\dagger(\vec{p})$ crea l'antiparticella di quadrimpulso (E_p, \vec{p}) ;

ed questi operatori⁶³ soddisfano le seguenti regole di commutazione che, come vedremo, garantiscono il rispetto delle regole di commutazione canoniche quando si considerino i campi stessi, appunto, come variabili lagrangiane generalizzate (tutte le altre coppie di operatori commutano fra loro ...)

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')] = 2 E_p (2\pi^3) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.264)$$

Naturalmente, essendo gli operatori ϕ e ϕ^\dagger soluzioni di una equazione differenziale lineare e omogenea (l'equazione di Klein-Gordon), essi sono evidentemente indeterminati a meno di una costante moltiplicativa.

La scelta fatta attraverso lo (2.264) è quella per cui la funzione d'onda $\psi_{\vec{q}}(x)$ associata allo stato⁶⁴ $|\vec{q}\rangle \equiv a^\dagger(\vec{q})|\Omega\rangle$, autostato del quadrimpulso per l'autovalore $(\sqrt{m^2 + |\vec{q}|^2}, \vec{q})$, è semplicemente un'onda piana, i.e.

$$\psi_{\vec{q}}(\vec{x}, t) \equiv \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = e^{-iqx} \equiv e^{-i(Et - \vec{q} \cdot \vec{x})} = e^{-iEt} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \quad (2.265)$$

A priori, per il solo fatto che, per definizione dell'operatore di creazione, $a^\dagger(\vec{q})|\Omega\rangle$ è autostato del quadrimpulso, ne segue solo che la funzione d'onda⁶⁵ $\psi_{\vec{q}}(x)$ sarà

⁶³Si noti che gli operatori di creazione/annichilazione si riferiscono sempre a particelle o antiparticelle aventi energia $E_p = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$ positiva !

⁶⁴Indicheremo qui e nel seguito con $|\Omega\rangle$ lo stato di vuoto, i.e. lo stato di minima energia del sistema considerato: assumeremo inoltre che esso sia non degenerare.

⁶⁵La funzione d'onda in questione può essere determinata anche facendo intervenire l'operatore di campo nel modo seguente

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{q}}(x) &\equiv \langle \Omega | \phi(x) | \vec{q} \rangle = \langle \Omega | \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \{a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}\} a^\dagger(\vec{q}) | \Omega \rangle = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \langle \Omega | \{a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}\} a^\dagger(\vec{q}) | \Omega \rangle = \end{aligned}$$

tale che $\psi_{\vec{q}}(x) = K_{\vec{q}} e^{-iqx}$.

La costante K è definita proprio dal fatto che

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = \langle \Omega | a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{q}) | \Omega \rangle = \langle \Omega | [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] | \Omega \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

la quale implica dunque che sia

$$\langle \psi_{\vec{p}} | \psi_{\vec{q}} \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (2.266)$$

D'altronde, ricordiamo che se $\psi_a(x)$ e $\psi_b(x)$ sono due funzioni d'onda soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon, allora il loro prodotto scalare⁶⁶ è

$$\langle \psi_a | \psi_b \rangle = i \int d^3x [\psi_a^* (\partial^0 \psi_b) - (\partial^0 \psi_a^*) \psi_b] \quad (2.267)$$

dove le due funzioni sono valutate allo stesso tempo t .

Nel caso in esame, abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\vec{p}} | \psi_{\vec{q}} \rangle &= i K_{\vec{p}}^* K_{\vec{q}} \int d^3x [e^{ipx} (-iq^0) e^{-iqx} - ip^0 e^{ipx} e^{-iqx}] = \\ &= K_{\vec{p}}^* K_{\vec{q}} \int d^3x (q^0 + p^0) e^{ix(p-q)} = K_{\vec{p}}^* K_{\vec{q}} (q^0 + p^0) e^{it(p^0 - q^0)} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = \\ &= |K_{\vec{p}}|^2 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \end{aligned}$$

ed il confronto con la (2.266) impone appunto che, indipendentemente da \vec{p} , sia $|K|^2 = 1$, ovvero⁶⁷ $K = 1$.

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \langle \Omega | [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] | \Omega \rangle e^{-ipx} = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} 2E (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) e^{-ipx} = e^{-iqx} \end{aligned}$$

⁶⁶L'espressione (2.267) non è, a stretto rigore, un prodotto scalare nel senso solito di questo termine in Meccanica Quantistica perché non è definito positivo. Esso nasce dal fatto che se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon, allora l'unica corrente conservata antilineare in ψ_1 e lineare in ψ_2 (ovvero sequilineare in $\psi_1, \psi_2 \dots$) risulta essere proporzionale a

$$J^\mu(x) = i [\psi_1^*(x) (\partial^\mu \psi_2(x)) - (\partial^\mu \psi_1(x))^* \psi_2(x)]$$

da cui ne segue che

$$\int d^3x J^0(t, \vec{x}) = i \int d^3x [\psi_1^* (\partial^0 \psi_1) - (\partial^0 \psi_1^*) \psi_2]$$

è certamente indipendente dal tempo e dunque rappresenta l'unica generalizzazione possibile (a meno di costanti moltiplicative) del prodotto scalare che non sia in conflitto con la dinamica.

⁶⁷Si noti che $|K|^2 = 1$ impone solo che K abbia modulo unitario e dunque sia una fase che può essere semplicemente riassorbita nella definizione della base.

Vogliamo notare infine che, siccome la densità di corrente⁶⁸ di probabilità associata alla generica funzione d'onda ψ che soddisfa l'equazione di Klein-Gordon è data da

$$j^\mu(x) = i [\psi^*(\partial^\mu\psi) - (\partial^\mu\psi^*)\psi] \quad (2.269)$$

la funzione d'onda $\psi_{\vec{p}}(x) = e^{-ipx}$ rappresenta uno stato con densità di particelle pari a

$$\rho(x) = J^0(x) = i [\psi^*(\partial^0\psi) - (\partial^0\psi^*)\psi] = 2E \quad (2.270)$$

Concludendo, dunque, possiamo dire che la normalizzazione scelta è tale per cui gli stati $a^+(\vec{q})|\Omega\rangle$ descrivono stati con $2E$ particelle per unità di volume. Questo risultato, come vedremo, ci ritornerà utile in seguito, quando tratteremo il problema dello spazio delle fasi, nell'ambito della teoria dello scattering.

Veniamo infine alla questione dei commutatori dei campi. Sulla base dell'analogia classica secondo cui, fissato comunque un tempo t , il campo $\phi(\vec{x}; t)$ costituisce una generalizzazione del concetto di coordinata lagrangiana, ci aspettiamo che risulti

$$[\phi(\vec{x}; t), \phi(\vec{y}; t)] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\phi^\dagger(\vec{x}; t), \phi^\dagger(\vec{y}; t)] = 0 \quad (2.271)$$

Ma che dire del commutatore $[\phi(\vec{x}; t), \phi^\dagger(\vec{y}; t)]$?

Questo non può essere altrettanto banale, infatti, proprio per l'analogia classica secondo cui il momento coniugato alla variabile lagrangiana q è

$$p \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

ne segue che il "momento coniugato" al campo $\phi(\vec{x}, t)$ sarà il campo

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi^\dagger(\vec{x}, t) \quad (2.272)$$

e, analogamente, quello coniugato al campo $\phi^\dagger(\vec{x}, t)$ risulta essere

$$\pi^\dagger(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi^\dagger)} = \partial_t \phi(\vec{x}, t) \quad (2.273)$$

⁶⁸Come abbiamo visto in precedenza, parlando del teorema di Noëther, se la lagrangiana è invariante in forma sotto il gruppo $U(1)$ delle trasformazioni di gauge di prima specie $x \rightarrow x$, $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, $\psi^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha}\psi^\dagger$ allora la corrente conservata che ne deriva è la seguente (cfr. (2.12))

$$J^\mu(x) = i \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \psi^* \right] \quad (2.268)$$

Quindi, proprio per l'analogia con la Meccanica Quantistica di prima quantizzazione, per cui ($\hbar = 1$) risulta

$$[p, x] = -i \quad (2.274)$$

dobbiamo adesso aspettarci⁶⁹ che valga la ovvia generalizzazione al caso continuo della (2.274), i.e.

$$\begin{aligned} [\pi(\vec{y}, t), \phi(\vec{x}, t)] &= -i \delta^3(\vec{y} - \vec{x}) \\ \Rightarrow [\phi(\vec{x}, t), \partial_t \phi^\dagger(\vec{y}, t)] &= i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (2.275)$$

e, analogamente, quindi, che sia

$$[\phi^\dagger(\vec{x}, t), \partial_t \phi(\vec{y}, t)] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.276)$$

Questo è, in effetti, esattamente quanto accade usando le regole di commutazione (2.264) fissate per gli operatori di creazione e distruzione. Infatti si ha

$$\begin{aligned} & [\phi(\vec{x}, t), \partial_t \phi^\dagger(\vec{y}, t)] = \\ &= \left[\int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \{a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}\}, \partial_t \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \{b(\vec{q}) e^{-iqy} + a^\dagger(\vec{q}) e^{iqy}\} \right]_{t=x^0=y^0} = \\ &= \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left\{ i q^0 [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] e^{-ipx} e^{iqy} - i q^0 [b^\dagger(\vec{p}), b(\vec{q})] e^{ipx} e^{-iqy} \right\}_{t=x^0=y^0} = \\ &= \int \frac{d^3 p}{2E_p} \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^6} i E_q \left\{ 2E_q (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) [e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \vec{q} \cdot \vec{y})} + e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \vec{q} \cdot \vec{y})}] \right\} \end{aligned}$$

dove si è usata la definizione (2.264) unitamente al fatto che

- abbiamo posto per definizione $px \equiv p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$
- risulta $x^0 = y^0 = t$,
- ed è $q^0 \equiv E_q$

per cui, visto che per la presenza nell'integrale della funzione delta proveniente dal commutatore, è $E_p = E_q$, si può evidentemente assumere che

$$p^0 x^0 - q^0 y^0 = t(p^0 - q^0) = 0$$

⁶⁹E' importante notare che, in base all'analogia con la MQ di prima quantizzazione, le regole di commutazione possono essere definite solo a tempi uguali. Una volta che queste siano state assegnate (proprietà cinematica), le regole di commutazione a tempi diversi sono determinate dall'evoluzione del sistema nel tempo, cioè dalla sua dinamica, ovvero dalle soluzioni esplicite dell'equazione del moto.

Ne segue quindi che il commutatore in studio, integrando la delta, vale

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \partial_t \phi^\dagger(\vec{y}, t) \right] = \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} iE_p \left\{ e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right\} \quad (2.277)$$

Ma

$$\int d^3 p e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = (2\pi)^3 \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \int d^3 p e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$$

quindi esso, alla fine, risulta pari a

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \partial_t \phi^\dagger(\vec{y}, t) \right] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.278)$$

che è quanto ci attendevamo in base all'analogia con la prima quantizzazione.

Lo stesso accade, ovviamente, anche per il commutatore $[\phi^\dagger, \partial_t \phi]$ per il quale risulta ancora

$$\left[\phi^\dagger(\vec{x}, t), \partial_t \phi(\vec{y}, t) \right] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.279)$$

Questo dimostra quindi che le regole di commutazione fissate per gli operatori di creazione e distruzione (2.264) sono esattamente quelle in grado di riprodurre le regole di commutazione che debbono valere, a tempi uguali, fra i campi ed i loro momenti coniugati.

Ovviamente, però, le regole di commutazione (2.264) consentono anche di determinare le regole di commutazione direttamente fra i campi stessi ed anche a tempi differenti. In generale⁷⁰, infatti abbiamo

$$\begin{aligned} & \left[\phi(x), \phi^\dagger(y) \right] = \\ &= \left[\int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \left\{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right\}, \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left\{ b(\vec{q}) e^{-iqy} + a^\dagger(\vec{q}) e^{iqy} \right\} \right] = \\ &= \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left\{ \left[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q}) \right] e^{-ipx} e^{iqy} + \left[b^\dagger(\vec{p}), b(\vec{q}) \right] e^{ipx} e^{-iqy} \right\} = \\ &= \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left\{ 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) e^{-ipx} e^{iqy} - 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) e^{ipx} e^{-iqy} \right\} \end{aligned}$$

Integrando in $d^3 p$, dato che quando $\vec{p} = \vec{q}$ anche $p^0 = q^0 = E_p = E_q \equiv \sqrt{m^2 + |\vec{q}|^2}$, abbiamo

$$\left[\phi(x), \phi^\dagger(y) \right] = \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left[e^{-iq(x-y)} - e^{iq(x-y)} \right] \quad (2.280)$$

⁷⁰Evidentemente dalle regole di commutazione (2.264) segue immediatamente che

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)] = 0$$

e questo integrale, usando il fatto che

$$\frac{d^3q}{2E_q} = d^4q \delta(q^2 - m^2) \Theta(q^0) \quad (2.281)$$

può essere riscritto nel modo seguente

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) \Theta(q^0) e^{-iq(x-y)} - \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) \Theta(q^0) e^{iq(x-y)} \end{aligned} \quad (2.282)$$

ovvero, con la sostituzione $q \rightarrow -q$ nel secondo integrale, finalmente otteniamo

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{-iq(x-y)} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] = \\ &\equiv i \Delta(x - y; m) \end{aligned} \quad (2.283)$$

dove si è fatto uso della definizione della funzione impropria

$$\Delta(x - y; m) \equiv -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{-iq(x-y)} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] \quad (2.284)$$

la quale, come si può dimostrare facilmente

- soddisfa l'equazione di Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \Delta(x; m) = 0 \quad (2.285)$$

- è definita in modo tale che

$$\partial_t \Delta(\vec{x}, t; m)|_{t=0} = -\delta(\vec{x}) \quad (2.286)$$

- è reale e dispari;
- è manifestamente Lorentz invariante.

Si noti che dalla sua natura dispari e dal fatto che è scalare sotto il gruppo di Lorentz, ne segue che la funzione Δ è nulla se x è un quadrivettore *space-like*, potendo x essere cambiato di segno con una opportuna trasformazione di Lorentz. Questo implica che il commutatore $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$ è nullo quando il quadrivettore $x - y$ è space-like, ovvero quando non è possibile connettere x con y in modo causale e quindi, in particolare, per esempio, quando $x^0 = y^0$, i.e. $\Delta(\vec{x}, 0; m) = 0$.

Questo risultato era comunque da attenderselo perché, se vogliamo coerenza con la relatività ristretta, variabili non causalmente correlabili non possono influenzarsi a vicenda e dunque non possono che commutare fra loro !

Quanto, infine, all'azione delle simmetrie discrete C , P e T , si dimostra che risulta (cfr. Appendice)

$$C a(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} b(\vec{p}) \longleftrightarrow C a^\dagger(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} b^\dagger(\vec{p}) \quad (2.287)$$

$$C b(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} a(\vec{p}) \longleftrightarrow C b^\dagger(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} a^\dagger(\vec{p}) \quad (2.288)$$

$$C \phi(x) C^{-1} = e^{-i\eta_c} \phi^\dagger(x) \longleftrightarrow C \phi^\dagger(x) C^{-1} = e^{i\eta_c} \phi(x) \quad (2.289)$$

$$P a(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_p} a(-\vec{p}) \longleftrightarrow P a^\dagger(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_p} a^\dagger(-\vec{p}) \quad (2.290)$$

$$P b(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_p} b(-\vec{p}) \longleftrightarrow P b^\dagger(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_p} b^\dagger(-\vec{p}) \quad (2.291)$$

$$P \phi(x) P^{-1} = e^{-i\eta_p} \phi(Px) \longleftrightarrow P \phi^\dagger(x) P^{-1} = e^{i\eta_p} \phi^\dagger(Px) \quad (2.292)$$

$$e^{i\eta_p} = \pm 1 \quad (2.293)$$

$$T a(\vec{p}) T^{-1} = e^{-i\eta_T} a(-\vec{p}) \longleftrightarrow T a^\dagger(\vec{p}) T^{-1} = e^{i\eta_T} a^\dagger(-\vec{p}) \quad (2.294)$$

$$T b(\vec{p}) T^{-1} = e^{i\eta_T} b(-\vec{p}) \longleftrightarrow T b^\dagger(\vec{p}) T^{-1} = e^{-i\eta_T} b^\dagger(-\vec{p}) \quad (2.295)$$

$$T \phi(x) T^{-1} = e^{-i\eta_T} \phi(Tx) \longleftrightarrow T \phi^\dagger(x) T^{-1} = e^{i\eta_T} \phi^\dagger(Tx) \quad (2.296)$$

dove, se $x = (t, \vec{x})$, allora $Px \equiv (t, -\vec{x})$ e $Tx \equiv (-t, \vec{x})$.

Si osservi che la condizione $C^2 = I$, per come agisce la trasformazione C , non può dare condizioni sul valore della fase $e^{i\eta_c}$, mentre la condizione $P^2 = I$ implica che, quanto a $e^{i\eta_p}$, non possa essere che $e^{i\eta_p} = \pm 1$.

Quanto invece a T^2 , evidentemente $T^2 = I$, dato che lo spin della particella è nullo e quindi è intero: essendo l'operatore T antiunitario, questa condizione, però, non può fornire condizioni di sorta sulla fase $e^{i\eta_T}$.

Un altro operatore, infine, di cui è interessante verificare la legge di trasformazione sotto le simmetrie C , P e T è senz'altro la quadricorrente conservata $J^\mu(x)$ associata all'invarianza di gauge di prima specie della lagrangiana (2.258), i.e. l'osservabile⁷¹

$$J^\mu(x) = i \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \phi^\dagger \right] = [(\partial^\mu \phi)(x) \phi^\dagger(x) - (\partial^\mu \phi^\dagger)(x) \phi(x)] \quad (2.297)$$

Risulta (cfr. Appendice)

$$C J^\mu(x) C^{-1} = -J^\mu(x) \quad (2.298)$$

$$P J^\mu(x) P^{-1} = J_\mu(Px) \quad (2.299)$$

$$T J^\mu(x) T^{-1} = J_\mu(Tx) \quad (2.300)$$

⁷¹La quadricorrente (2.297) è un operatore autoaggiunto, dunque è un'osservabile, a differenza dei campi stessi che, ovviamente, come gli operatori di creazione e distruzione, non lo sono.

2.2.2 Il campo vettoriale libero

Le equazioni di moto per i campi⁷² che descrivono particelle vettoriali, cioè di spin 1, sono⁷³ le seguenti

$$\begin{aligned} (\square + m^2)W^\mu &= 0 \\ \partial_\mu W^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (2.306)$$

dove m è la loro massa, che assumeremo diversa da zero.

Una Lagrangiana che, attraverso il principio di minima azione, determina le equazioni di moto (2.306) è la seguente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^\dagger - m^2 W^\mu W_\mu^\dagger \quad (2.307)$$

dove

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu \quad (2.308)$$

Infatti, dalle equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu W_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu} &= 0 \\ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu W_\nu^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^\dagger} &= 0 \end{aligned}$$

otteniamo, rispettivamente

$$\partial_\mu F^{\dagger\mu\nu} + m^2 W^{\dagger\nu} = 0 \Rightarrow \square W^{\dagger\nu} - \partial^\nu (\partial_\mu W^{\dagger\mu}) + m^2 W^{\dagger\nu} = 0 \quad (2.309)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 W^\nu = 0 \Rightarrow \square W^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu W^\mu) + m^2 W^\nu = 0 \quad (2.310)$$

⁷²Ricordiamo che, per un campo vettoriale, la legge di trasformazione sotto il gruppo di Poincaré è la seguente:

$$(a, \Lambda) : \quad x \rightarrow x' = a + \Lambda x \quad (2.301)$$

$$W^\mu(x) \rightarrow W'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu W^\nu(x) \quad (2.302)$$

ovvero (trasformazione attiva)

$$U^{-1}(a, \Lambda) W^\mu(x) U(a, \Lambda) = W'^\mu(x) \quad (2.303)$$

equivalente a

$$U^{-1}(a, \Lambda) W^\mu(x) U(a, \Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu W^\nu(\Lambda^{-1}(x - a)) \quad (2.304)$$

da cui (trasformazione passiva)

$$U(a, \Lambda) W^\mu(x) U^{-1}(a, \Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu W^\nu(\Lambda x + a) \quad (2.305)$$

⁷³Un campo quadrivettoriale come W^μ , dal punto di vista delle rotazioni, è la somma diretta di un campo vettoriale ($s = 1$) e di un campo scalare ($s = 0$). La condizione $\partial_\mu W^\mu = 0$ elimina la componente scalare e quindi lascia solo lo spin 1.

D'altronde, essendo $F^{\mu\nu}$ ovviamente antisimmetrico, è

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

per cui, usando l'espressione di sinistra dell'equazione del moto (2.310) se ne deduce che

$$\partial_\mu [m^2 W^\mu] = 0 \Rightarrow \partial_\mu W^\mu = 0 \quad (2.311)$$

dove si fatto uso del fatto che la massa del campo non è nulla.

Analogamente, partendo da $F^{\dagger\mu\nu}$, si dimostra che anche la quadridivergenza di $W^{\dagger\mu}$ è nulla, per cui, in definitiva, risultano così dimostrate le equazioni di moto (2.306) sia per W^μ che per $W^{\dagger\mu}$.

La quantizzazione del campo W^μ , al solito, viene effettuata espandendolo in termini di operatori di creazione/distruzione, nel modo seguente

$$W^\mu(x) = \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[A(r, \vec{p}) \epsilon^\mu(r, \vec{p}) e^{-ipx} + B^\dagger(r, \vec{p}) \epsilon^{*\mu}(r, \vec{p}) e^{ipx} \right] \quad (2.312)$$

$$W^{\dagger\mu}(x) = \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[B(r, \vec{p}) \epsilon^\mu(r, \vec{p}) e^{-ipx} + A^\dagger(r, \vec{p}) \epsilon^{*\mu}(r, \vec{p}) e^{ipx} \right] \quad (2.313)$$

dove

- $A(r, \vec{p})$ annichila la particella di quadrimpulso $(E_p, \vec{p}) = (\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$ e di stato di polarizzazione r ;
- $A^\dagger(r, \vec{p})$ crea la particella di quadrimpulso $p \equiv (E_p, \vec{p})$ e polarizzazione r ;
- $B(r, \vec{p})$ annichila l'antiparticella di quadrimpulso p e polarizzazione r ;
- $B^\dagger(r, \vec{p})$ crea l'antiparticella di quadrimpulso p e polarizzazione r ;

e questi operatori soddisfano le seguenti regole di commutazione (tutte le altre sono nulle ...)

$$\left[A(r, \vec{p}), A^\dagger(s, \vec{p}') \right] = \left[B(r, \vec{p}), A^\dagger(s, \vec{p}') \right] = 2 E_p (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.314)$$

dove δ_{rs} è il simbolo di Kronecker.

Quanto allo stato di polarizzazione, esso è specificato dai tre quadrivettori $\epsilon^\mu(r, \vec{p})$, per $r = 1, 2, 3$. Questi quadrivettori, affinché sia garantita la condizione di quadridivergenza nulla $\partial_\mu W^\mu = 0$, devono soddisfare il vincolo

$$p_\mu \epsilon^\mu(r, \vec{p}) = 0 \quad (2.315)$$

Sempre nel caso di una particella di massa $m \neq 0$, la scelta consueta è quella di fissare i quadrivettori $\epsilon^\mu(r, \vec{0})$ nel sistema di riferimento dove la particella è

ferma, ovvero dove essa ha quadrimpulso $\hat{p} \equiv (m, 0, 0, 0)$ e quindi di definirli nel riferimento dove essa ha impulso \vec{p} , usando il boost che effettua la trasformazione $\Lambda(\vec{p}) \cdot \hat{p} \equiv (E, \vec{p})$ senza ruotare gli assi, i.e. attraverso la matrice di Lorentz

$$\Lambda(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} & \frac{p_x}{m} & \frac{p_y}{m} & \frac{p_z}{m} \\ \frac{p_x}{m} & 1 + \frac{p_x p_x}{m(E+m)} & \frac{p_x p_y}{m(E+m)} & \frac{p_x p_z}{m(E+m)} \\ \frac{p_y}{m} & \frac{p_y p_x}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_y p_y}{m(E+m)} & \frac{p_y p_z}{m(E+m)} \\ \frac{p_z}{m} & \frac{p_z p_x}{m(E+m)} & \frac{p_z p_y}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_z p_z}{m(E+m)} \end{pmatrix} \quad (2.316)$$

Nel riferimento dove la particella è ferma, la polarizzazione, dovendo essere ortogonale al quadrimpulso (nella metrica di Minkowski), deve essere tale che

$$\epsilon^\mu(r, \vec{0}) = (0, \vec{\epsilon}(r))$$

dove gli $\vec{\epsilon}(r)$ sono tre versori indipendenti, individuati ciascuno dall'indice r . Se indichiamo con $\vec{e}_x = \vec{e}_1$, $\vec{e}_y = \vec{e}_2$ e $\vec{e}_z = \vec{e}_3$ i versori dei tre assi coordinati, allora una scelta possibile è semplicemente la seguente

$$\vec{\epsilon}(r) \equiv \vec{e}_r$$

la quale conduce, secondo la regola sopra indicata, a quadrivettori di polarizzazione reali, dati da

$$\epsilon^\mu(r, \vec{p}) = \Lambda(\vec{p})^\mu{}_\nu \epsilon^\nu(r, \vec{0}) = \left(\frac{p_r}{m}, \delta_{ir} + \frac{p_i p_r}{m(E+m)} \right) \quad (2.317)$$

dove p_r indica la componente r -esima del vettore \vec{p} e δ_{ir} è il simbolo di Kronecker. Un'altra scelta equivalente può essere quella di usare invece autostati di s_z , i.e.

$$\vec{\epsilon}(+) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y); \quad \vec{\epsilon}(0) \equiv \vec{e}_z; \quad \vec{\epsilon}(-) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y); \quad (2.318)$$

I quadrivettori di polarizzazione così definiti soddisfano⁷⁴ inoltre la condizione di completezza seguente

$$\sum_{r=1}^3 \epsilon^\mu(r, \vec{p}) \epsilon^{*\nu}(r, \vec{p}) = -\delta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \quad (2.323)$$

⁷⁴Dalla definizione segue in particolare che, nel caso (2.317) di vettori di polarizzazione reale, risulta

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(r, \vec{p}) \epsilon_\mu^*(s, \vec{p}) &= \frac{p_r p_s}{m^2} - \left(\delta_{ir} + \frac{p_i p_r}{m(E+m)} \right) \left(\delta_{is} + \frac{p_i p_s}{m(E+m)} \right) = \\ &= \frac{p_r p_s}{m^2} - \delta_{rs} - 2 \frac{p_r p_s}{m(E+m)} - \frac{p_r p_s (E+m)(E-m)}{m^2 (E+m)^2} = \\ &= -\delta_{rs} + p_r p_s \left[\frac{1}{m^2} - \frac{2}{m(E+m)} - \frac{E-m}{m^2 (E+m)} \right] = \\ &= -\delta_{rs} + p_r p_s \frac{m+E-2m-E+m}{m^2 (E+m)} = -\delta_{rs} \end{aligned} \quad (2.319)$$

Quanto poi alla funzione d'onda $\psi^\mu(r, \vec{p}; x)$ che, in rappresentazione delle coordinate è associata allo stato

$$|r, \vec{p}\rangle \equiv A^\dagger(r, \vec{p})|\Omega\rangle$$

essa⁷⁵ è data da

$$\psi^\mu(r, \vec{p}; x) = \epsilon^\mu(r, \vec{p}) e^{-ipx} \equiv \langle \Omega | W^\mu(x) | r, \vec{p} \rangle \quad (2.324)$$

Coerentemente con l'espressione della corrente⁷⁶ di probabilità conservata in virtù dell'invarianza di gauge di prima specie della Lagrangiana (2.307),

$$J^\mu = -i \left[(\partial^\mu W^\nu) W_\nu^\dagger - (\partial^\mu W_\nu^\dagger) W^\nu \right] \quad (2.328)$$

Questa relazione può essere dedotta anche semplicemente osservando che siccome

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p}) = \left(\Lambda(\vec{p}) \cdot \epsilon(s, \vec{0}) \right)^\mu \quad (2.320)$$

deve essere evidentemente che

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p}) \epsilon_\mu^*(r, \vec{p}) = \left(\Lambda(\vec{p}) \epsilon(s, \vec{0}) \right) \cdot \left(\Lambda(\vec{p}) \epsilon(r, \vec{0}) \right) \quad (2.321)$$

e per le note proprietà del prodotto scalare fra quadrivettori, questa quantità è pari a

$$\epsilon^\mu(s, \vec{0}) \epsilon_\mu^*(r, \vec{0}) = -\delta_{sr} \quad (2.322)$$

visto come sono definite queste stesse polarizzazioni nel sistema del CM .

⁷⁵Per lo stato $B^\dagger(r, \vec{p})|\Omega\rangle$ occorre semplicemente scambiare W con il suo hermitiano coniugato W^\dagger .

⁷⁶Dal teorema di Noëther (cfr. (2.12)) abbiamo

$$J^\mu(x) = -i \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\rho)} W_\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\rho^*)} W_\rho^* \right] \quad (2.325)$$

ovvero

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= i \left[F^{*\mu\rho} W_\rho - F^{\mu\rho} W_\rho^* \right] = i \left[(\partial^\mu W^{*\rho} - \partial^\rho W^{*\mu}) W_\rho - (\partial^\mu W^\rho - \partial^\rho W^\mu) W_\rho^* \right] = \\ &= i \left[(\partial^\mu W^{*\rho}) W_\rho - (\partial^\rho W^{*\mu}) W_\rho - (\partial^\mu W^\rho) W_\rho^* + (\partial^\rho W^\mu) W_\rho^* \right] \end{aligned} \quad (2.326)$$

che, tenendo conto che $\partial_\rho W^\rho = 0$, si può riscrivere come

$$J^\mu(x) = i \left[(\partial^\mu W^{*\rho}) W_\rho - (\partial^\mu W^\rho) W_\rho^* \right] - i \partial^\rho \left[W^{*\mu} W_\rho - W^\mu W_\rho^* \right] \quad (2.327)$$

Si osservi ora che il termine $\hat{J}^\mu \equiv -i \partial^\rho \left[W^{*\mu} W_\rho - W^\mu W_\rho^* \right]$

- soddisfa separatamente l'equazione di continuità $\partial_\mu \hat{J}^\mu = 0$;
- il suo contributo all'integrale spaziale di $J^0(x)$ è nullo perché coincide con una divergenza nelle sole variabili spaziali;

Per queste ragioni, allo scopo di definire il prodotto scalare fra due funzioni d'onda, possiamo ignorarne il contributo, come abbiamo fatto nella (2.328).

il prodotto scalare fra due stati di singola particella $|a\rangle$ e $|b\rangle$, rappresentati dalle funzioni d'onda $\psi_{(a)}^\mu(x)$ e $\psi_{(b)}^\mu(x)$ si deve scrivere⁷⁷

$$\langle a|b\rangle = -i \int d^3x \left[(\partial^0 \psi_{(b)}^\mu(\vec{x}, t)) \psi_{(a)\mu}^*(\vec{x}, t) - (\partial^0 \psi_{(a)}^{*\mu}(\vec{x}, t)) \psi_{(b)}^\mu(\vec{x}, t) \right] \quad (2.331)$$

per cui, di nuovo, la densità di particelle associata alla funzione d'onda (2.324) vale $2E$, infatti, per la (2.319), risulta

$$\begin{aligned} \rho(x) = J^0(x) &= -i \left[(\partial^0 \psi^\mu(r, \vec{p}; x)) \psi_\mu^*(r, \vec{p}; x) - (\partial^0 \psi^{*\mu}(r, \vec{p}; x)) \psi^\mu(r, \vec{p}; x) \right] = \\ &= 2p^0 \equiv 2E \end{aligned} \quad (2.332)$$

Veniamo adesso alla legge di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione sotto il gruppo di Poincaré. Ricordiamo che il campo vettoriale gode della proprietà per cui

$$U(a, \Lambda) W^\mu(x) U^{-1}(a, \Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_{\nu} W^\nu(\Lambda x + a) \quad (2.333)$$

La presenza dei vettori di polarizzazione nella rappresentazione del campo

$$W^\mu(x) = \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3p}{2E_p (2\pi)^3} \left[A(r, \vec{p}) \epsilon^\mu(r, \vec{p}) e^{-ipx} + B^\dagger(r, \vec{p}) \epsilon^{*\mu}(r, \vec{p}) e^{ipx} \right] \quad (2.334)$$

richiede che, per stabilire la legge di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione in modo coerente con la (2.333), si debbano conoscere preventivamente come gli $\epsilon^\mu(r, \vec{p})$ si trasformano sotto il gruppo di Lorentz. Ricordiamo che, per la definizione (2.317), risulta

$$\epsilon^\mu(s, \vec{p}) \equiv \Lambda(\vec{p})^\mu_{\nu} \epsilon^\nu(s, \vec{0}) \quad (2.335)$$

Dimostriamo adesso che il quadrivettore $\Lambda \cdot \epsilon(s, \vec{p})$ è combinazione lineare delle polarizzazioni $\epsilon(r, \vec{\Lambda p})$, qualsiasi siano Λ e \vec{p} , i.e. che si ha

$$\Lambda \cdot \epsilon(s, \vec{p}) = M_{rs} \epsilon(r, \vec{\Lambda p}) \quad (2.336)$$

⁷⁷Per gli autostati dell'impulso di cui sopra, si ha

$$\langle r, \vec{p} | s, \vec{q} \rangle = -i \int d^3x \left[(\partial^0 \psi^\mu(s, \vec{q}; x)) \psi_\mu^*(r, \vec{p}; x) - (\partial^0 \psi^{*\mu}(r, \vec{p}; x)) \psi^\mu(s, \vec{q}; x) \right] \quad (2.329)$$

i.e., risulta

$$\begin{aligned} \langle r, \vec{p} | s, \vec{q} \rangle &= -i \int d^3x \left[(\partial^0 e^{-iqx}) \epsilon^\mu(s, \vec{q}) \epsilon_\mu^*(r, \vec{p}) e^{ipx} - \epsilon_\mu^*(r, \vec{p}) (\partial^0 e^{ipx}) e^{-iqx} \epsilon^\mu(s, \vec{q}) \right] = \\ &= i^2 \int d^3x (q^0 + p^0) e^{ix(p-q)} \epsilon_\mu^*(r, \vec{p}) \epsilon^\mu(s, \vec{q}) = 2p^0 \delta_{rs} (2\pi^3) \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \end{aligned} \quad (2.330)$$

coerentemente con le regole di commutazione ...

con M matrice opportuna, che adesso determineremo.

La (2.336) può essere riscritta, usando la definizione (2.335), come segue

$$\begin{aligned}\Lambda \cdot \Lambda(\vec{p}) \cdot \epsilon(s, \vec{0}) &= M_{rs} \Lambda(\vec{\Lambda p}) \cdot \epsilon(r, \vec{0}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Lambda^{-1}(\vec{\Lambda p}) \cdot \Lambda \cdot \Lambda(\vec{p}) \cdot \epsilon(s, \vec{0}) &= M_{rs} \epsilon(r, \vec{0})\end{aligned}\quad (2.337)$$

D'altronde $\Lambda^{-1}(\vec{\Lambda p}) \cdot \Lambda \cdot \Lambda(\vec{p})$ è una rotazione, poiché trasforma \hat{p} in se stesso: si tratta della *rotazione di Wigner* $\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})$

$$\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}) \equiv \Lambda^{-1}(\vec{\Lambda p}) \cdot \Lambda \cdot \Lambda(\vec{p}) \quad (2.338)$$

E' immediato allora osservare che, se R_{js} è la matrice ortogonale che descrive la rotazione di Wigner di cui sopra in tre dimensioni, è

$$\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})^\mu{}_\nu \epsilon^\nu(s, \vec{0}) = R_{js} \epsilon^\mu(j, \vec{0}) \Rightarrow M_{rs} = R_{rs} \quad (2.339)$$

cioè la matrice M che abbiamo introdotto con la (2.336) altri non è che la matrice ortogonale definita dalla rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})$.

Riprendendo allora la (2.336)

$$\Lambda \cdot \epsilon(s, \vec{p}) = R_{rs} \epsilon(r, \vec{\Lambda p}) \quad (2.340)$$

e moltiplicando a sinistra per $(R^{-1})_{st}$, otteniamo (si ricordi che R è ortogonale)

$$\begin{aligned}(R^{-1})_{st} \Lambda \cdot \epsilon(s, \vec{p}) &= (R^{-1})_{st} R_{rs} \epsilon(r, \vec{\Lambda p}) \Rightarrow \epsilon(t, \vec{\Lambda p}) = (R^{-1})_{st} \Lambda \cdot \epsilon(s, \vec{p}) \\ \Rightarrow \epsilon(t, \vec{\Lambda p}) &= R_{ts} \Lambda \cdot \epsilon(s, \vec{p}) \Leftrightarrow \epsilon^\mu(t, \vec{\Lambda p}) = R_{ts} \Lambda^\mu{}_\nu \cdot \epsilon^\nu(s, \vec{p})\end{aligned}\quad (2.341)$$

Dato questo modo di trasformarsi dei vettori di polarizzazione, la legge di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione che garantisce la (2.333) è la seguente

$$U(a, \Lambda) A(s, \vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{-ia \cdot \Lambda p} R_{rs} A(r, \vec{\Lambda p}) \quad (2.342)$$

$$U(a, \Lambda) A^\dagger(s, \vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{ia \cdot \Lambda p} R_{rs}^* A^\dagger(r, \vec{\Lambda p}) \quad (2.343)$$

e lo stesso per gli operatori B e B^\dagger .

Risulta infatti ($U \equiv U(a, \Lambda) \dots$)

$$\begin{aligned}U(a, \Lambda) W^\mu(x) U^{-1}(a, \Lambda) &= \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \left[U A(r, \vec{p}) U^{-1} \epsilon^\mu(r, \vec{p}) e^{-ipx} + \right. \\ &\quad \left. U B^\dagger(r, \vec{p}) U^{-1} \epsilon^{*\mu}(r, \vec{p}) e^{ipx} \right] = \\ &= \sum_{r,k} \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \left[e^{-ia \cdot \Lambda p} R_{kr} A(k, \vec{\Lambda p}) \epsilon^\mu(r, \vec{p}) e^{-ipx} + \right. \\ &\quad \left. e^{ia \cdot \Lambda p} R_{kr}^* B^\dagger(k, \vec{\Lambda p}) \epsilon^{*\mu}(r, \vec{p}) e^{ipx} \right]\end{aligned}$$

Ponendo $q = \Lambda p \Rightarrow p \cdot x = (\Lambda p) \cdot (\Lambda x) = q \cdot \Lambda x$, abbiamo allora

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda) W^\mu(x) U^{-1}(a, \Lambda) &= \\ &= \sum_{r,k} \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left[e^{-iq \cdot (a + \Lambda x)} R_{kr} A(k, \vec{q}) \epsilon^\mu(r, \Lambda^{-1} q) + \right. \\ &\quad \left. e^{iq \cdot (a + \Lambda x)} R_{kr}^* B^\dagger(k, \vec{q}) \epsilon^{*\mu}(r, \Lambda^{-1} q) \right] \end{aligned} \quad (2.344)$$

ma, per la (2.341)

$$R_{kr} \epsilon(r, \Lambda^{-1} q) = R_{kr} \hat{R}_{rt} \Lambda^{-1} \cdot \epsilon(t, \vec{q}) \quad (2.345)$$

dove \hat{R} è adesso la rotazione di Wigner definita da

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}} &= \Lambda^{-1}(\Lambda^{-1} q) \cdot \Lambda^{-1} \cdot \Lambda(q) = \left(\Lambda^{-1}(q) \cdot \Lambda \cdot \Lambda(\Lambda^{-1} q) \right)^{-1} = \\ &= \left(\Lambda^{-1}(\Lambda p) \cdot \Lambda \cdot \Lambda(p) \right)^{-1} = (\mathcal{R})^{-1} \end{aligned} \quad (2.346)$$

e dunque

$$R_{kr} \epsilon^\mu(r, \Lambda^{-1} q) = \left(\Lambda^{-1} \right)_{\nu}^{\mu} \epsilon^\nu(k, \vec{q}) \quad (2.347)$$

Sostituendo la (2.347) nella (2.344), otteniamo immediatamente la (2.333) che risulta così dimostrata.

Quanto infine all'azione delle simmetrie C , P e T , data la definizione (2.317) del vettore di polarizzazione per cui

$$\epsilon_\mu(r, \vec{p}) = -\epsilon_\mu(r, -\vec{p}) = \epsilon_\mu^*(r, \vec{p}) \quad (2.348)$$

abbiamo che risulta

$$C A(s, \vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_C} B(s, \vec{p}) \longleftrightarrow C A^\dagger(s, \vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_C} B^\dagger(s, \vec{p}) \quad (2.349)$$

$$C B(s, \vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_C} A(s, \vec{p}) \longleftrightarrow C B^\dagger(s, \vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_C} A^\dagger(s, \vec{p}) \quad (2.350)$$

$$C W^\mu(x) C^{-1} = e^{-i\eta_C} W^{\dagger\mu}(x) \longleftrightarrow C W^{\dagger\mu}(x) C^{-1} = e^{i\eta_C} W^\mu(x) \quad (2.351)$$

$$P A(s, \vec{p}) P^{-1} = -e^{-i\eta_P} A(s, -\vec{p}) \longleftrightarrow P A^\dagger(s, \vec{p}) P^{-1} = -e^{i\eta_P} A^\dagger(s, -\vec{p}) \quad (2.352)$$

$$P B(s, \vec{p}) P^{-1} = -e^{i\eta_P} B(s, -\vec{p}) \longleftrightarrow P B^\dagger(s, \vec{p}) P^{-1} = -e^{-i\eta_P} B^\dagger(s, -\vec{p}) \quad (2.353)$$

$$P W^\mu(x) P^{-1} = e^{-i\eta_P} W_\mu(Px) \longleftrightarrow P W^\mu(x) P^{-1} = e^{-i\eta_P} W_\mu(Px) \quad (2.354)$$

$$T A(s, \vec{p}) T^{-1} = -e^{-i\eta_T} A(s, -\vec{p}) \longleftrightarrow T A^\dagger(s, \vec{p}) T^{-1} = -e^{i\eta_T} A^\dagger(s, -\vec{p}) \quad (2.355)$$

$$T B(s, \vec{p}) T^{-1} = -e^{i\eta_T} B(s, -\vec{p}) \longleftrightarrow T B^\dagger(s, \vec{p}) T^{-1} = -e^{-i\eta_T} B^\dagger(s, -\vec{p}) \quad (2.356)$$

$$T W^\mu(x) T^{-1} = e^{-i\eta_T} W_\mu(Tx) \longleftrightarrow T W^\mu(x) T^{-1} = e^{-i\eta_T} W_\mu(Tx) \quad (2.357)$$

dalle quali, per quanto riguarda la corrente (2.328)

$$J^\mu = -i \left((\partial^\mu W^\nu) W_\nu^\dagger - (\partial^\mu W_\nu^\dagger) W^\nu \right) \quad (2.358)$$

ricaviamo

$$C J^\mu(x) C^{-1} = J^\mu(x) \quad (2.359)$$

$$P J^\mu(x) P^{-1} = J_\mu(Px) \quad (2.360)$$

$$T J^\mu(x) T^{-1} = J_\mu(Tx) \quad (2.361)$$

Veniamo adesso a considerare un caso molto particolare di campo vettoriale cioè quello del campo elettromagnetico $A^\mu(x)$.

Ricordiamo che, classicamente, in assenza di cariche e correnti, il campo A^μ soddisfa la seguente equazione del moto

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (2.362)$$

la quale può essere dedotta dalla lagrangiana già usata nel caso massivo (2.307), ponendo $m = 0$, ovvero dalla lagrangiana⁷⁸

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.363)$$

dove $F^{\mu\nu}$ è il tensore di cui alla (2.308), i.e.

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.364)$$

che, nel caso attuale, è proprio il consueto tensore del campo elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.365)$$

Si noti che, nello scrivere la lagrangiana abbiamo usato il fatto che, proprio per il suo significato fisico in termini dei campi \vec{E} e \vec{B} , $F^{\mu\nu}$ è reale, i.e.

$$F^{\mu\nu} = F^{*\mu\nu} \quad (2.366)$$

⁷⁸Rispetto al caso del campo vettoriale carico di massa m , la lagrangiana presenta adesso un fattore $\frac{1}{4}$ invece di $\frac{1}{2}$ perché adesso $\partial^\mu A^\nu$ compare quattro volte in essa, visto che compare sia in $F^{\mu\nu}$ che in $F_{\mu\nu}$... Chiaramente il fattore moltiplicativo non ha comunque effetto sulle equazioni di moto, essendo esse omogenee nella lagrangiana: volendo scriverla correttamente normalizzata nel sistema c.g.s. es., il fattore sarebbe in realtà $-\frac{1}{16\pi}$.

e dunque anche il campo A^μ è un campo autoaggiunto (o, comunque, può essere sempre imposto che sia tale!).

A differenza del caso massivo, dall'equazione di moto (2.362) non discende la condizione (2.311) di quadridivergenza nulla. Questa condizione può essere imposta indipendentemente, usando il fatto che, fissato $F_{\mu\nu}$, cioè fissati i campi elettromagnetici \vec{E} e \vec{B} , il potenziale A_μ è indeterminato a meno di una trasformazione di gauge

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi \quad (2.367)$$

dove $\chi = \chi(x)$ è una funzione scalare, a priori qualsiasi.

Questa arbitrarietà può essere usata per scegliere A_μ in modo che soddisfi la condizione (gauge) di Lorentz⁷⁹, i.e.

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (2.368)$$

In questo modo, l'equazione per il potenziale si semplifica e diventa

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \Rightarrow \square A^\nu = 0 \quad (2.369)$$

L'equazione

$$\square A^\nu = 0 \quad (2.370)$$

ha soluzioni piane della forma

$$A^\mu = N \epsilon^\mu e^{-ikx} \quad (2.371)$$

dove $k_\mu k^\mu \equiv k^2 = 0$, N è un opportuno fattore di normalizzazione ed ϵ^μ è il quadrivettore che descrive appunto la polarizzazione dell'onda.

La condizione di Lorentz, come abbiamo già visto nel caso massivo, implica che non tutte le quattro polarizzazioni indipendenti siano possibili, bensì solo quelle per cui

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad (2.372)$$

Questo, ovviamente, riduce da quattro a tre le polarizzazioni⁸⁰ possibili.

⁷⁹Come è ben noto dall'elettromagnetismo classico, basta che $\chi(x)$ sia scelto in modo che soddisfi l'equazione $\square \chi = \partial^\mu A_\mu$: evidentemente il campo A'_μ che discende dalla (2.367) ha quadridivergenza nulla ed è equivalente ad A_μ per quanto riguarda la descrizione dei campi elettromagnetici.

⁸⁰Nel caso massivo, la condizione sulla quadridivergenza eliminava il contributo scalare, lasciando solo quello di spin 1. Nel caso di massa nulla, un'affermazione simile perderebbe di significato perché, in questo caso, è lo spin come variabile a non essere più definito! Per massa nulla, si può parlare, infatti, solo di stati di elicità definita (e questo è sempre uno solo ...). La condizione sulla quadridivergenza elimina uno stato di elicità che corrisponde a $\lambda = 0$.

Ma noi sappiamo che gli stati di polarizzazione indipendenti di un fotone con impulso \vec{k} fissato sono solo due !

L'ulteriore riduzione avviene, come noto, tenendo conto che la gauge di Lorentz non esaurisce i gradi di arbitrarietà che abbiamo su A^μ , infatti l'ulteriore trasformazione di gauge *ristretta*

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi; \quad \square \chi = 0 \quad (2.373)$$

lascia inalterate sia la condizione di Lorentz che il tensore $F^{\mu\nu}$.

Quest'ultima libertà di gauge corrisponde, per le soluzioni piane, a traslare la polarizzazione nel modo seguente (λ è un coefficiente complesso arbitrario)

$$\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + \lambda k^\mu \quad (2.374)$$

Questa possibilità ha conseguenze importanti, infatti proviamo a considerare una soluzione con

$$k^\mu = (k^0, \vec{k}); \quad \epsilon^\mu = (\epsilon^0, \vec{\epsilon}) \quad (2.375)$$

che soddisfa la condizione di Lorentz, i.e.

$$\epsilon \cdot k = 0 \quad (2.376)$$

La condizione di gauge (2.374) implica che si possa sommare ad ϵ^μ un qualunque multiplo di k^μ ed avere ancora un vettore di polarizzazione equivalente a quello di partenza. Essendo certamente $k^0 \neq 0$ dato che k è sul cono luce, possiamo dunque sempre fare in modo che

$$\epsilon^0 = 0 \Rightarrow \epsilon^\mu = (0, \vec{\epsilon}) \quad (2.377)$$

La condizione di Lorentz diviene allora

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0 \quad (2.378)$$

ovvero implica che $\vec{\epsilon}$, a sua volta, sia trasverso all'impulso spaziale del fotone e dunque esistano solo due polarizzazioni indipendenti.

In questa gauge, evidentemente, $\text{div} \vec{A} = 0$ e, in assenza di cariche e correnti, il potenziale scalare è nullo, i.e. $A^0 \equiv 0$: è la *gauge di radiazione* detta anche *gauge di Coulomb* o anche *gauge trasversa*, nella quale il potenziale scalare $V = A^0$ soddisfa l'equazione dell'elettrostatica⁸¹. Ovviamente questa gauge non è covariante al cambiare del sistema di riferimento inerziale: lo è, comunque, a

⁸¹In presenza di cariche, vale l'equazione $\nabla^2 V = -4\pi \rho$: il potenziale scalare appare come se si propagasse in modo istantaneo, cioè a velocità infinita. Il punto è che il moto delle cariche è determinato dai campi \vec{E} e \vec{B} e non dal quadripotenziale e, visto che la scelta attuale differisce da quella canonica per una trasformazione di gauge, essa è legittima e perfettamente equivalente a quella canonica quanto ad effetti osservabili.

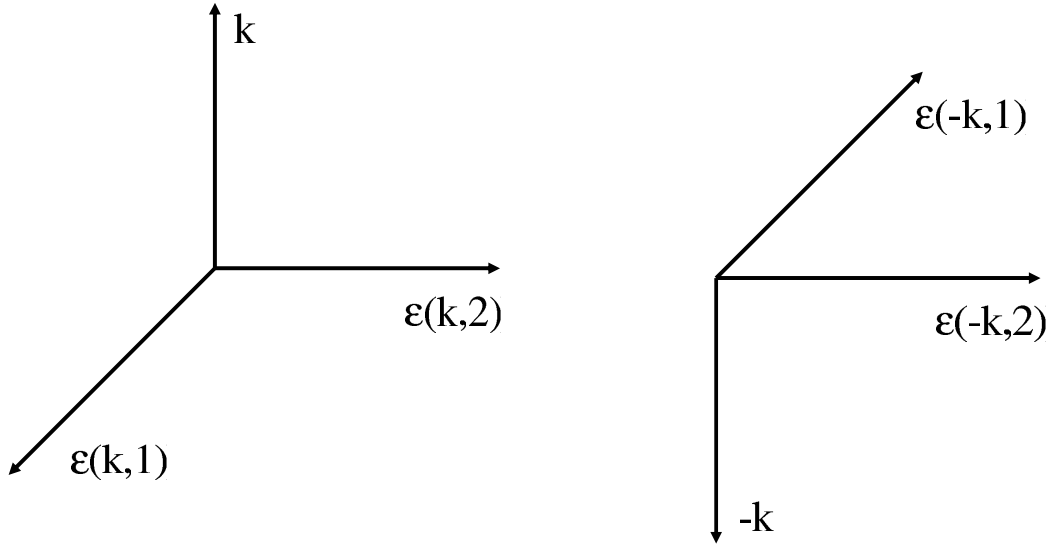


Figure 4: *Polarizzazioni lineari del fotone e sua direzione di propagazione*

meno di una trasformazione di gauge *ristretta* !

Per un'onda che viaggia nella direzione \vec{k} dell'asse z , possiamo scegliere

$$\vec{\epsilon}_z(1) = (1, 0, 0) \quad (2.379)$$

$$\vec{\epsilon}_z(2) = (0, 1, 0) \quad (2.380)$$

e questo corrisponde a scegliere polarizzazioni lineari e reali, per cui, evidentemente risulta

$$\vec{\epsilon}_z(i)^* = \vec{\epsilon}_z(i), \quad i = 1, 2 \quad (2.381)$$

Per ipotesi, i vettori $\vec{\epsilon}_z(1)$, $\vec{\epsilon}_z(2)$ e $\vec{k}/|\vec{k}|$ formano una terna destrorsa, rispettivamente come gli assi cartesiani x , y , z : seguendo la convenzione usata da Bjorken e Drell⁸² assumeremo che sia

$$\vec{\epsilon}_{-z}(1) = -\vec{\epsilon}_z(1) \quad (2.382)$$

$$\vec{\epsilon}_{-z}(2) = \vec{\epsilon}_z(2) \quad (2.383)$$

Un'altra scelta equivalente e molto spesso più comoda è quella di usare polarizzazioni circolari, i.e., sempre per un fotone che viaggia lungo l'asse z

$$\vec{\epsilon}_z(+) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{\epsilon}_z(1) - i \vec{\epsilon}_z(2)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0) \quad \text{elicita'} \lambda = +1 \quad (2.384)$$

$$\vec{\epsilon}_z(-) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\epsilon}_z(1) - i \vec{\epsilon}_z(2)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0) \quad \text{elicita'} \lambda = -1 \quad (2.385)$$

⁸²J.D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill 1965

ed in questo caso, risulta evidentemente che

$$\vec{\epsilon}_z(\pm)^* = -\vec{\epsilon}_z(\mp) \quad (2.386)$$

Sempre nel caso di polarizzazioni circolari, date le (2.382) e (2.383), risulta altresì

$$\vec{\epsilon}_{-z}(+) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\epsilon}_z(1) - i\vec{\epsilon}_z(2)) = \vec{\epsilon}_z(-) \quad (2.387)$$

$$\vec{\epsilon}_{-z}(-) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{\epsilon}_z(1) - i\vec{\epsilon}_z(2)) = \vec{\epsilon}_z(+) \quad (2.388)$$

i.e.

$$\vec{\epsilon}_{-z}(\pm) = \vec{\epsilon}_z(\mp) \quad (2.389)$$

Fin qui si è sempre assunto che l'impulso sia diretto come l'asse z , nel suo verso oppure in verso opposto.

Vediamo ora che succede nel caso generico in cui

$$k^\mu = (k, \vec{k}) \quad (2.390)$$

Posto che sia

$$\vec{k} = k (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \quad (2.391)$$

allora iniziamo definendo la rotazione seguente:

$$R_{\vec{k}} = R_z(\phi) R_y(\theta) R_z^{-1}(\phi) \equiv e^{-i\phi L_3} e^{-i\theta L_2} e^{i\phi L_3} \quad (2.392)$$

dove gli L_j sono i consueti generatori delle rotazioni in tre dimensioni, i.e. le matrici

$$(L_j)_{kl} = -i \epsilon_{jkl} \quad (2.393)$$

Questa rotazione gode della proprietà per cui⁸³

$$R_{\vec{k}}(0, 0, 1) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \Rightarrow R_{\vec{k}}(0, 0, k) = \vec{k} \quad (2.397)$$

⁸³Ricordiamo, per prima cosa, che una generica trasformazione attiva di rotazione R in tre dimensioni può essere sempre scritta come $R = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}}$ dove $\vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$ è l'asse di rotazione (lasciato invariato dalla stessa ...) ed $|\vec{\alpha}|$ è l'ampiezza della rotazione stessa (in senso antiorario, intorno all'asse di cui sopra): la rotazione (2.392) risulta essere una rotazione di θ intorno all'asse $\vec{n} = R_z(\phi)\vec{n}_0$, dove $\vec{n}_0 \equiv (0, 1, 0)$.

Per dimostrarlo, partiamo dal fatto che, in generale, risulta che $R e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}} R^{-1} = e^{i(R\vec{\alpha}) \cdot \vec{L}}$, ovvero la trasformazione in questione sulla generica rotazione $e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}}$ non altera l'ampiezza della rotazione ma solo l'asse intorno cui essa avviene che, invece di essere individuato dall'originale $\vec{\alpha}$, è

Poniamo dunque, per definizione⁸⁴

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, s) \equiv R_{\vec{k}} \vec{\epsilon}_z(s) \Rightarrow \epsilon^\mu(s, \vec{k}) \equiv (0, \vec{\epsilon}(\vec{k}, s)) \quad (2.398)$$

Essendo R reale, ne segue in particolare che, per polarizzazioni circolari, risulta (si ricordi che le componenti dei vettori di polarizzazione sono comunque solo spaziali...)

$$\vec{\epsilon}_z(\pm)^* = -\vec{\epsilon}_z(\mp) \Rightarrow \epsilon_\mu^*(\lambda, \vec{k}) = -\epsilon_\mu(-\lambda, \vec{k}) = \epsilon^\mu(-\lambda, \vec{k}) \quad (2.399)$$

$$\vec{\epsilon}_z(\pm) = \vec{\epsilon}_{-z}(\mp) \Rightarrow \epsilon^\mu(\lambda, \vec{k}) = \epsilon^\mu(-\lambda, -\vec{k}) = -\epsilon_\mu(-\lambda, -\vec{k}) \quad (2.400)$$

Venendo adesso allo sviluppo del campo elettromagnetico in termini di operatori di creazione e distruzione, questo è dato⁸⁵ da ($E_p \equiv |\vec{p}|$)

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a(\vec{p}, s) \epsilon^\mu(s, \vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}, s) \epsilon^{*\mu}(s, \vec{p}) e^{ipx} \right] \\ &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a(\vec{p}, \lambda) \epsilon^\mu(\lambda, \vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}, \lambda) \epsilon^{*\mu}(\lambda, \vec{p}) e^{ipx} \right] \end{aligned} \quad (2.401)$$

individuato da $R\vec{\alpha}$. Essendo nel nostro caso

$$R_y(\theta) = e^{-i\vec{n}_0 \cdot \vec{L}} \quad (2.394)$$

$$R_z(\phi) \equiv e^{-i\phi L_3} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.395)$$

è evidente che $R_z(\phi)\vec{n}_0 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \equiv \vec{n}$ è l'effettivo asse intorno a cui avviene la rotazione (2.392) e dunque che $R_z(\phi) R_y(\theta) R_z^{-1}(\phi)$ descrive una rotazione di θ intorno all'asse \vec{n} che, su basi semplicemente geometriche, manda evidentemente il versore $(0, 0, 1)$ in \vec{k} .

Verifichiamolo adesso direttamente. Si ha infatti

$$\begin{aligned} R_z(\phi) R_y(\theta) R_z^{-1}(\phi) (0, 0, k) &= R_z(\phi) R_y(\theta) (0, 0, k) = R_z(\phi) (k \sin\theta, 0, k \cos\theta) = \\ &= k(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. In forma esplicita, la rotazione in questione è

$$R_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \sin^2\phi + \cos^2\phi \cos\theta & \sin\phi \cos\phi(\cos\theta - 1) & \sin\theta \cos\phi \\ \sin\phi \cos\phi(\cos\theta - 1) & \cos^2\phi + \sin^2\phi \cos\theta & \sin\theta \sin\phi \\ -\sin\theta \cos\phi & -\sin\theta \sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.396)$$

⁸⁴Ne segue, allora, per esempio, che la convenzione sopracitata di Bjorken e Drell (2.382) e (2.383) corrisponde, semplicemente, ad individuare il vettore $(0, 0, -k)$ rispetto al vettore $(0, 0, k)$ attraverso gli angoli di Eulero $\theta = \pi$, $\phi = 0 \dots$

⁸⁵cfr. J.D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill 1965, pag.74
L'espressione (2.401) non è covariante a vista a causa proprio della convenzione fatta per le polarizzazioni che implica, per esempio, che $A^0 = 0 \dots$ Se vogliamo mantenere la covarianza esplicita dell'espansione del campo A^μ sotto il gruppo di Lorentz, allora è necessario coinvolgere tutte e quattro le componenti del campo, inclusi quindi i due gradi di libertà non fisici.

dove la somma è fatta solo sui due stati di polarizzazione fisici e $\epsilon^\mu(\lambda, \vec{p})$ descrive appunto lo stato⁸⁶ di polarizzazione del fotone generato dall'operatore di creazione $a^\dagger(\vec{p}, \lambda)$, quando esso viene applicato al vuoto.

Si osservi che, per come è stato definito, il campo $A^\mu(x)$ risulta certamente autoaggiunto⁸⁷ !

Quanto poi all'algebra del campo, essa è definita attraverso le seguenti uniche regole di commutazione non banali

$$[a(\vec{p}, s), a^\dagger(\vec{q}, t)] = 2E_p (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{st} \quad (2.403)$$

Venendo infine all'azione delle simmetrie discrete C , P e T , usando stati di polarizzazione circolari, risulta che

$$C a(\vec{k}, \lambda) C^{-1} = -a(\vec{k}, \lambda) \quad \longleftrightarrow \quad C a^\dagger(\vec{k}, \lambda) C^{-1} = -a^\dagger(\vec{k}, \lambda) \quad (2.404)$$

$$C A_\mu(x) C^{-1} = -A_\mu(x) \quad (2.405)$$

$$P a(\vec{k}, \lambda) P^{-1} = -a(-\vec{k}, -\lambda) \quad \longleftrightarrow \quad P a^\dagger(\vec{k}, \lambda) P^{-1} = -a^\dagger(-\vec{k}, -\lambda) \quad (2.406)$$

$$P A^\mu(x) P^{-1} = A_\mu(Px) \quad (2.407)$$

$$T a(\vec{k}, \lambda) T^{-1} = a(-\vec{k}, \lambda) \quad \longleftrightarrow \quad T a^\dagger(\vec{k}, \lambda) T^{-1} = a^\dagger(-\vec{k}, \lambda) \quad (2.408)$$

$$T A^\mu(x) T^{-1} = A_\mu(Tx) \quad (2.409)$$

Osserviamo adesso in particolare che, nel momento in cui richiediamo che

$$C a(\vec{p}, \lambda) C^{-1} = -a(\vec{p}, \lambda); \quad C a^\dagger(\vec{p}, \lambda) C^{-1} = -a^\dagger(\vec{p}, \lambda) \quad (2.410)$$

stiamo dicendo che fotone e antifotone sono la stessa particella, cosa del resto ovvia visto che il campo è autoaggiunto ...

⁸⁶Infatti la funzione d'onda del fotone individuato dallo stato $a^\dagger(\vec{p}, \lambda) |\Omega\rangle$ è data da

$$\begin{aligned} \psi_\lambda^\mu(x) &= \langle \Omega | A^\mu(x) a^\dagger(\vec{p}, \lambda) | \Omega \rangle = \\ &= \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \langle \Omega | [a(\vec{q}, \lambda') \epsilon^\mu(\vec{q}, \lambda') e^{-iqx} + a^\dagger(\vec{q}, \lambda') \epsilon^{*\mu}(\vec{q}, \lambda') e^{iqx}] a^\dagger(\vec{p}, \lambda) | \Omega \rangle = \\ &= \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \epsilon^\mu(\vec{q}, \lambda') e^{-iqx} (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{q} - \vec{p}) 2E_q = \epsilon^\mu(\vec{q}, \lambda) e^{-ipx} \end{aligned} \quad (2.402)$$

dove si è usato il fatto che $\langle \Omega | a a^\dagger | \Omega \rangle = \langle \Omega | [a, a^\dagger] | \Omega \rangle$ e che $\langle \Omega | a^\dagger a^\dagger | \Omega \rangle = 0$, nonché l'espressione canonica del commutatore.

⁸⁷Essendo il campo A^μ autoaggiunto, la lagrangiana che ne descrive la dinamica non può essere invariante per trasformazioni di gauge di prima specie e dunque non può esistere una corrente conservata ad essa associata ...

Come si vede, però, il fatto che particella e antiparticella in questo caso coincidano, non implica che C non abbia alcun effetto sullo stato di fotone, infatti dalla (2.410) segue immediatamente che

$$C |\vec{k}, s \rangle = - |\vec{k}, s \rangle \quad (2.411)$$

ovvero che su uno stato di n fotoni, risulta

$$C |n \text{ fotoni} \rangle = (-1)^n |n \text{ fotoni} \rangle \quad (2.412)$$

e poiché l'elettrodinamica (QED) è invariante sotto C , da questo segue in particolare che non possono esistere elementi di matrice, dovuti all'interazione elettromagnetica, fra stati C -dispari con un numero di fotoni pari e stati C -pari con un numero di fotoni dispari: è il teorema di Furry.

2.2.3 Il decadimento del π^0

Proviamo adesso ad applicare quanto detto fino ad ora circa le simmetrie discrete, per esempio, al caso del decadimento del pione π^0 .

Esso decade quasi unicamente per via elettromagnetica in due fotoni

$$\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma \quad (2.413)$$

attraverso l'annichilazione della coppia di quarks/antiquarks che lo compongono. Siccome il processo è, appunto, elettromagnetico, si devono conservare separatamente C , P e T . Vediamo con quali conseguenze.

Iniziamo dalla conservazione di C .

Evidentemente, visto che i fotoni sono autostati dispari della coniugazione di carica, i.e. $e^{i\eta_C(\gamma)} = -1$, ne segue immediatamente che il pione deve essere anch'esso autostato della coniugazione di carica, corrispondente all'autovalore $+1$, dovendo appunto essere

$$e^{i\eta_C(\pi^0)} = e^{i\eta_C(\gamma)} \cdot e^{i\eta_C(\gamma)} = (-1)^2 = +1 \quad (2.414)$$

i.e.

$$C|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle \quad (2.415)$$

Poi sappiamo anche che il pione è pseudoscalare⁸⁸: quali sono le conseguenze sullo stato dei due fotoni in relazione alla conservazione di P ?

⁸⁸La parità intrinseca del π^0 viene determinata, come vedremo tra breve, proprio attraverso lo studio della correlazione fra gli stati di polarizzazione lineare dei due fotoni emessi; ma questa strada però, come è ovvio, è percorribile solo per il pione neutro...

Quanto, invece al pione carico, per esempio, al pione π^- , la sua parità intrinseca è stata determinata attraverso lo studio della reazione di cattura nucleare che segue alla cattura elettromagnetica del π^- da parte del deutone, i.e. la reazione

$$\pi^- + d \rightarrow n + n \quad (2.416)$$

Il deutone, come è noto, è in uno stato $J^P = 1^+$. Ricordiamo a questo proposito che, siccome la forza forte conserva la parità, ci attendiamo che lo stato fondamentale di deutone abbia parità definita: si trova infatti che questo sostanzialmente uno stato $L = 0$ con una piccola contaminazione da $L = 2$ (infatti possiede un piccolo momento di quadrupolo elettrico, incompatibile con la simmetria sferica di $L = 0$), dunque uno stato pari. Quanto allo spin, esso deve essere $S = 1$ per ragioni di statistica: i due nucleoni devono essere infatti in uno stato globalmente dispari per scambio e, visto che l'isospin del deutone è nullo e dunque lo stato di isospin dei due nucleoni che lo formano è dispari mentre la parte orbitale è pari, ne segue che lo stato di spin deve essere anch'esso pari e dunque può essere solo $S = 1$.

Quanto al mesone π^- , si assume di sapere che esso abbia spin nullo (la dimostrazione sperimentale di questo fatto sarà data in seguito e si basa sul confronto delle sezioni d'urto della reazione $\pi^+ + d \rightarrow p + p$ con quella della sua inversa).

Ne segue che (cfr. K. Brueckner et al. in Phys. Rev. 81, 575 (1951)), siccome la cattura (2.416) avviene in onda S (la forza forte è una forza a corto range, perché possa agire è necessario dunque che la funzione d'onda del pione si sovrapponga apprezzabilmente a quella del deutone e questo, come è noto dalla teoria dell'atomo di idrogeno, avviene sostanzialmente solo

Consideriamo, per semplicità, il caso del decadimento a riposo ed ammettiamo che i due fotoni si propaghino lungo l'asse z in versi opposti. Sappiamo che il π^0 ha spin nullo, dunque la proiezione dello spin dei fotoni lungo qualunque asse e quindi anche lungo l'asse z deve restare nulla per conservazione del momento angolare: ne segue che i soli stati possibili (entrambi i fotoni avranno, ovviamente, la stessa energia k pari a $k = m_\pi^0/2$) sono

$$|k, + \rangle | -k, + \rangle \quad e \quad |k, - \rangle | -k, - \rangle \quad (2.418)$$

i.e. entrambi devono avere necessariamente la stessa elicità.

Occorre però tenere ora di conto del fatto che i fotoni sono bosoni identici e quindi che lo stato deve essere simmetrico di scambio, per cui, in realtà, gli stati possibili

per stati aventi $L = 0$) evidentemente lo stato di partenza deve essere tale che $J^P = 1^x$ dove x è appunto la parità intrinseca, ignota, del pione. Lo stato finale dei due neutroni, essendo la reazione mediata dalla forza forte che conserva la Parità, ha la stessa parità dello stato iniziale e dunque (visto che il momento angolare deve anche lui conservarsi !) è anch'esso tale per cui $J^P = 1^x$. Trattandosi di un sistema non relativistico, spin e momento orbitale sono separabili: siccome i neutroni hanno spin $1/2$, lo stato di spin della coppia può essere solo $S = 0$ oppure $S = 1$ per cui, per le ben note regole di composizione dei momenti angolari, dovendo lo stato avere $J = 1$, può solo essere

$$\begin{aligned} J = 1 \quad \Rightarrow \quad & L = 0, \quad S = 1 \\ & L = 1, \quad S = 0 \\ & L = 1, \quad S = 1 \\ & L = 2, \quad S = 1 \end{aligned}$$

D'altronde lo stato dei due neutroni deve essere antisimmetrico per scambio, ovvero, visto che, per scambio, la funzione d'onda orbitale va come $(-1)^L$ e quella di spin come $(-1)^{S+1}$, deve risultare

$$(-1)^L \cdot (-1)^{S+1} = -1 \quad (2.417)$$

la quale implica che $L + S$ debba essere pari e l'unico caso che realizza questa condizione ed è compatibile con $J = 1$ è $L = 1, S = 1$. Ma allora, assunto che la parità si conservi nel processo (interazione forte), poiché la parità dello stato dei due neutroni è $(-1)^L = -1$, questa deve essere anche la parità dello stato iniziale. Ma il fatto che la cattura avvenga in onda S garantisce che la parità orbitale dello stato ($\pi^- d$) sia positiva e siccome la parità intrinseca del deutone è anch'essa positiva (ricordiamo che, per convenzione, neutroni e protoni hanno la stessa parità intrinseca che è definita pari a $+1$, senza che questo possa avere conseguenze osservabili visto che il numero barionico si conserva), ne segue che la parità intrinseca del pione deve essere $P_\pi = -1$, cioè il pione negativo deve essere, appunto, una particella *pseudoscalare*. Per il pione positivo, ovviamente non si può fare lo stesso ragionamento perché, essendo positivo, non subisce la cattura elettromagnetica da parte del nucleo e quella nucleare che ne consegue; però, siccome esso è C -coniugato con il pione negativo e le simmetrie P e C commutano, deve valere anche per lui la stessa conclusione, i.e. che è pseudoscalare.

sono

$$|A\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|k, +\rangle | -k, +\rangle + | -k, +\rangle |k, +\rangle) \quad (2.419)$$

$$|B\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|k, -\rangle | -k, -\rangle + | -k, -\rangle |k, -\rangle) \quad (2.420)$$

dove il primo vettore descrive lo stato del fotone "1" mentre il secondo quello del fotone "2".

Poiché abbiamo visto che, per parità, risulta

$$P|\vec{k}, \pm\rangle = -|-\vec{k}, \mp\rangle \quad (2.421)$$

evidentemente né $|A\rangle$ né $|B\rangle$ sono autostati della parità, bensì

$$P|A\rangle = |B\rangle; \quad P|B\rangle = |A\rangle \quad (2.422)$$

D'altronde, per la conservazione di P nelle interazioni elettromagnetiche, essendo

$$P|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle \quad (2.423)$$

lo stato dei due fotoni deve essere autovettore di P per l'autovalore -1 , e quindi deve essere descritto dalla combinazione lineare seguente

$$\begin{aligned} |2\gamma \text{ dal } \pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle - |B\rangle) \equiv |2\gamma, P = -1\rangle = \\ &= \frac{1}{2}(|k, +\rangle | -k, +\rangle + | -k, +\rangle |k, +\rangle - \\ &- |k, -\rangle | -k, -\rangle - | -k, -\rangle |k, -\rangle) \end{aligned} \quad (2.424)$$

Come possiamo distinguerla, per esempio, da quella opposta, corrispondente allo stato di parità $+1$?

Per esempio, se guardiamo il fotone che viaggia nel verso positivo dell'asse z ed osserviamo che ha una certa elicità definita λ , è immediato che ne concludiamo comunque che anche l'altro fotone ha la stessa elicità e quindi non ci apprendiamo nulla circa la parità dello stato.

Proviamo invece a vedere che succede se misuriamo lo stato di polarizzazione del fotone che si muove nel verso positivo dell'asse z lungo, per esempio, l'asse x . Poiché per la (2.384) e la (2.385) evidentemente è

$$\vec{\epsilon}_x(\vec{k}) \equiv \vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}(\vec{k}, -) - \vec{\epsilon}(\vec{k}, +)) \quad (2.425)$$

ecco che, se partiamo dallo stato $|2\gamma, P = -1\rangle$ di cui sopra, allora se il fotone che si muove nel verso positivo dell'asse z viene osservato trovarsi nello stato di

polarizzazione lungo l'asse x , ne segue che lo stato del fotone che si muove nel verso negativo dell'asse z , vista la (2.424) e la (2.425) deve essere il seguente

$$\begin{aligned} |\gamma(2) > &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|-k, - > -| -k, - > -| -k, + > -| -k, + >) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|-k, - > +| -k, + >) \end{aligned} \quad (2.426)$$

e dunque il suo stato di polarizzazione, sempre per le definizioni (2.384) e la (2.385), risulta essere il seguente

$$\vec{\epsilon}(2) = -\frac{1}{2} (-2i \vec{\epsilon}(-\vec{k}, 2)) = i\vec{\epsilon}_y(-k) \quad (2.427)$$

ovvero il fotone che viaggia lungo il verso negativo dell'asse z deve risultare polarizzato lungo y : in altri termini, la polarizzazione lineare dei due fotoni deve risultare ortogonale.

Questo risultato è una diretta conseguenza della parità dello stato di partenza: se assumiamo infatti che questa sia $+1$, ovvero che

$$\begin{aligned} |2\gamma > &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|A > +|B >) \equiv |2\gamma, P = +1 > = \\ &= \frac{1}{2} (|k, + > |-k, + > +|-k, + > |k, + > + \\ &+ |k, - > |-k, - > +|-k, - > |k, - >) \end{aligned} \quad (2.428)$$

allora, se è stata osservata la polarizzazione del fotone che viaggia nel verso positivo dell'asse z allineata lungo l'asse x , lo stato del secondo fotone deve necessariamente essere il seguente

$$\begin{aligned} |\gamma(2) > &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|-k, - > +|-k, - > -|-k, + > -|-k, + >) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|-k, - > -|-k, + >) \end{aligned} \quad (2.429)$$

e dunque il suo stato di polarizzazione deve risultare il seguente

$$= \frac{1}{2} (2 \vec{\epsilon}(-\vec{k}, 1)) = \vec{\epsilon}_x(-k) \quad (2.430)$$

ovvero le polarizzazioni lineari dei due fotoni devono, in questo caso, essere parallele.

Sperimentalmente si verifica che le polarizzazioni sono ortogonali⁸⁹, coerentemente con il fatto che P è conservata e che il π^0 è pseudoscalare.

⁸⁹La polarizzazione di un fotone di alta energia viene inferita attraverso l'osservazione del piano definito dalla coppia e^+e^- a cui esso dà origine, che tende ad essere allineato, appunto, con la direzione di polarizzazione lineare del gamma, come mostrato da N.M. Kroll e W. Wada in Phys. Rev. 98, 1355 (1955).

2.2.4 Il campo di Dirac libero

L'evoluzione del campo di Dirac⁹⁰ libero è retta dalla lagrangiana⁹¹

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi \quad (2.450)$$

⁹⁰Le matrici γ^μ sono matrici 4×4 che anticommutano fra di loro, risultando (è quella che segue la loro definizione costitutiva !)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \quad (2.431)$$

Per quanto riguarda la loro forma esplicita, useremo la rappresentazione di Dirac-Pauli, i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.432)$$

essendo $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_i)$ le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.433)$$

Le γ^μ sono quindi tutte reali, eccetto la γ^2 che è immaginaria pura.

Accanto alle matrici γ^μ , si definisce altresì la matrice reale γ_5 nel modo seguente

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \quad (\gamma_5)^2 = I \quad (2.434)$$

Essa anticommuta con tutte le γ^μ .

La matrice γ^0 (come pure la γ_5 ...) è hermitiana, mentre le γ^i sono antihermitiane (essendo le matrici di Pauli, invece, ovviamente hermitiane...).

Da questo e dalla (2.431) segue immediatamente che

$$\gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu \quad (2.435)$$

Venendo adesso alla legge di trasformazione sotto il gruppo di Poincaré del campo di Dirac, essa è la seguente:

$$(a, \Lambda) : \quad x \rightarrow x' = a + \Lambda x \quad (2.436)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \quad (2.437)$$

ovvero, in termini delle trasformazioni unitarie $U(a, \Lambda)$ che costituiscono la rappresentazione del gruppo di Poincaré definita sullo spazio degli stati del sistema (trasformazione attiva)

$$U^{-1}(a, \Lambda) \psi(x) U(a, \Lambda) = \psi'(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}(x - a)) \quad (2.438)$$

da cui, equivalentemente

$$U(a, \Lambda) \psi(x) U^{-1}(a, \Lambda) = S^{-1}(\Lambda) \psi(\Lambda x + a) \quad (2.439)$$

La rappresentazione $S(\Lambda)$ del gruppo di Lorentz non è unitaria (non potrebbe mai esserlo trattandosi di una rappresentazione non banale di dimensione finita di un gruppo non compatto), infatti essa è tale per cui

$$S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0 S^{-1}(\Lambda) \gamma^0 \Leftrightarrow S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0 S(\Lambda^{-1}) \gamma^0 \Leftrightarrow \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = S(\Lambda^{-1}) \quad (2.440)$$

Da questo fatto segue che, prendendo l'hermitiana coniugata della (2.439) e ricordando che $(\gamma^0)^2 = I$, abbiamo

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda) \psi^\dagger(x) U^{-1}(a, \Lambda) &= \psi^\dagger(\Lambda x + a) S^\dagger(\Lambda^{-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow U(a, \Lambda) \psi^\dagger(x) U^{-1}(a, \Lambda) \gamma^0 &= \psi^\dagger(\Lambda x + a) \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger(\Lambda^{-1}) \gamma^0 \Rightarrow \\ \Rightarrow U(a, \Lambda) \bar{\psi}(x) U^{-1}(a, \Lambda) &= \bar{\psi}(\Lambda x + a) S(\Lambda) \end{aligned} \quad (2.441)$$

La rappresentazione spinoriale $S(\Lambda)$ è tale che

- $S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)$ con $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$;
- $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$;

Dalla definizione della rappresentazione $S(\Lambda)$ discende direttamente che

- siccome $(\sigma_{\mu\nu})^\dagger = \frac{1}{2i}[\gamma_\mu^\dagger, \gamma_\nu^\dagger]$ e risulta $\gamma^0\gamma_\mu^\dagger\gamma^0 = \gamma_\mu$, come abbiamo già anticipato, risulta

$$\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = S(\Lambda^{-1}) \equiv S^{-1}(\Lambda) \quad (2.442)$$

- per una trasformazione attiva ($\vec{v} \rightarrow R(\vec{\theta})\vec{v}$) definita dal vettore di rotazione $\vec{\theta} \equiv \theta \vec{n}$, risulta

$$S(\vec{\theta}) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\Sigma}} = \cos(\theta/2)I - i(\vec{n}\cdot\vec{\Sigma})\sin(\theta/2) \quad (2.443)$$

dove

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.444)$$

- per un boost attivo ($m(1,0,0,0) \rightarrow m\gamma(1,v\vec{n})$) definito dalla velocità v ($c=1$) nella direzione \vec{n} (trasformazione di Lorentz pura, senza rotazione degli assi), avendo definito la *rapidità* y nel modo consueto, i.e.

$$y \equiv th^{-1}v \quad (2.445)$$

risulta

$$S(\vec{v}) = e^{-\frac{1}{2}y\vec{n}\cdot\vec{\alpha}} = \cosh(y/2)I + (\vec{n}\cdot\vec{\alpha})\sinh(y/2) \quad (2.446)$$

dove, per definizione, abbiamo posto

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.447)$$

- siccome la matrice γ_5 anticommuta con tutte del γ^μ , essa commuta con $\sigma_{\mu\nu}$ ed è quindi scalare per trasformazioni di Lorentz, i.e. risulta

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma_5 S(\Lambda) = \gamma_5$$

⁹¹Al posto della lagrangiana (2.450) viene spesso usata la forma seguente, non simmetrica nei campi ψ e $\bar{\psi}$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (2.448)$$

E' immediato dimostrare che le due lagrangiane sono equivalenti fra loro, visto che la loro differenza è una quadridivergenza dei campi, essendo appunto

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi] = \frac{i}{2}\partial_\mu[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] \quad (2.449)$$

da cui si ricava appunto l'equazione⁹² di Dirac per ψ e per $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$, così espressa

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0; \quad i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi} = 0 \quad (2.451)$$

In prima quantizzazione, posto $E_p \equiv \sqrt{p^2 + m^2}$, le soluzioni piane dell'equazione di Dirac hanno la forma

$$u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}; \quad v(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \quad (2.452)$$

dove gli spinori $u(\vec{p})$ e $v(\vec{p})$ soddisfano, rispettivamente, alle seguenti equazioni⁹³

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0 \quad (2.453)$$

$$(\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0 \quad (2.454)$$

dove $p \equiv (E_p, \vec{p})$ ed abbiamo definito⁹⁴ $\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$.

Per quanto riguarda, poi, gli spinori \bar{u} e \bar{v} , essi soddisfano le stesse equazioni degli spinori u e v , con la sola differenza che adesso l'operatore agisce sullo spinore

⁹²Osserviamo che, moltiplicando, per esempio, l'equazione di Dirac per la ψ a sinistra per l'operatore $i \partial_\mu \gamma^\mu + m$ otteniamo

$$(i^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu - m^2) \psi = 0$$

La condizione $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \delta^{\mu\nu}$ è *costitutiva* della definizione delle γ proprio perché assicura che la ψ (come pure la $\bar{\psi}$...) descriva una particella di massa m , i.e. soddisfi l'equazione di Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \psi = 0$$

Si osservi che questa equazione di K-G, comunque, avrebbe quattro soluzioni ad energia positiva e quattro ad energia negativa, cioè il doppio di quelle dell'equazione di Dirac !

La cosa, naturalmente, non deve stupire visto che è stata ottenuta "iterando" in un certo senso l'equazione di Dirac di partenza ...

⁹³Chiaramente, le equazioni (2.453) e (2.454) sono le equazioni algebriche in cui prende forma l'equazione di Dirac quando si vada in rappresentazione dell'impulso !

⁹⁴Ricordiamo alcune proprietà algebriche degli operatori che stiamo trattando. Risulta

$$\begin{aligned} (\not{p} \pm m)(\not{p} \pm m) &= (m \pm \not{p})(m \pm \not{p}) = \\ &= (p_\mu \gamma^\mu \pm m)(p_\nu \gamma^\nu \pm m) = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \pm 2m \not{p} + m^2 \\ &= \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \{\gamma^\mu \gamma^\nu\} \pm 2m \not{p} + m^2 = p^2 \pm 2m \not{p} + m^2 = \\ &= 2m^2 \pm 2m \not{p} = 2m(m \pm \not{p}) \end{aligned} \quad (2.455)$$

mentre è

$$(\not{p} \pm m)(\not{p} \mp m) = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - m^2 = 0 \quad (2.456)$$

a destra, invece che a sinistra, i.e. risulta⁹⁵

$$\bar{u}(\vec{p})(\not{p} - m) = 0 \quad (2.461)$$

$$\bar{v}(\vec{p})(\not{p} + m) = 0 \quad (2.462)$$

Gli spinori $u(\vec{p})$ individuano soluzioni ad energia positiva, infatti

$$i \frac{\partial}{\partial t} [u(\vec{p}) e^{-i p \cdot x}] = E_p u(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} \quad (2.463)$$

a differenza degli spinori $v(\vec{p})$ che, invece, per la stessa ragione, individuano soluzioni ad energia negativa: per entrambi i tipi di soluzione, poi, esistono due componenti indipendenti dei relativi spinori, i quali, da ora in poi saranno quindi individuati anche con un indice r opportuno, i.e.

$$u(\vec{p}) \rightarrow u^{(r)}(\vec{p}); \quad v(\vec{p}) \rightarrow v^{(r)}(\vec{p}) \quad r = 1, 2$$

La definizione esplicita degli spinori u e v che noi adotteremo è la seguente⁹⁶

$$u^{(r)}(\vec{p}) \equiv \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} u_0^{(r)} \Leftrightarrow \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{u}_0^{(r)} \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} \quad (2.464)$$

$$v^{(r)}(\vec{p}) \equiv \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} v_0^{(r)} \Leftrightarrow \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{v}_0^{(r)} \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} \quad (2.465)$$

⁹⁵Dimostriamo, per esempio, la (2.461). Prendiamo dunque l'hermitiana coniugata della (2.453) e moltiplichiamola a destra per γ^0 . Evidentemente si ha

$$[(\not{p} - m)u(\vec{p})]^+ \gamma^0 = 0 \quad (2.457)$$

ovvero

$$0 = u(\vec{p})^+ (\not{p} - m)^+ \gamma^0 = u(\vec{p})^+ \gamma^0 \gamma^0 (\not{p} - m)^+ \gamma^0 = \bar{u}(\vec{p}) \gamma^0 (\not{p} - m)^+ \gamma^0 \quad (2.458)$$

e siccome le γ^i sono antiermitiane ed anticommutano con γ^0 , che, invece, è hermitiana ed il suo quadrato è pari all'identità, abbiamo

$$\gamma^0 (\not{p} - m)^+ \gamma^0 = (\not{p} - m) \quad (2.459)$$

per cui risulta infine che l'equazione per \bar{u} ha la forma seguente

$$[(\not{p} - m)u(\vec{p})]^+ \gamma^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(\vec{p}) (\not{p} - m) = 0 \quad (2.460)$$

c.v.d.

⁹⁶Data la relazione (2.456), è evidente che gli spinori u e v definiti rispettivamente dalle (2.464) e (2.465) soddisfano le equazioni (2.453), (2.454), i.e. l'equazione di Dirac. In più, occorre osservare che le definizioni in questione servono a fissare la normalizzazione delle soluzioni.

dove abbiamo posto⁹⁷

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad v_0^{(2)} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.466)$$

per cui, definendo per comodità

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.467)$$

si ha⁹⁸

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} \begin{pmatrix} (m + E_p) w^{(r)} \\ (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) w^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m} w^{(r)} \\ \sqrt{E_p - m} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w^{(r)} \end{pmatrix} \quad (2.469)$$

dove si è usato il fatto che $\vec{p} = \sqrt{E_p^2 - m^2} \vec{n}$.

Per quanto riguarda, poi, gli spinori $v^{(r)}$, ponendo adesso, in analogia con la (2.467)

$$\tilde{w}^{(1)} = w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \tilde{w}^{(2)} = -w^{(1)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.470)$$

dalla loro definizione⁹⁹ risulta che

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} \begin{pmatrix} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \tilde{w}^{(r)} \\ (m + E_p) \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p - m} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \tilde{w}^{(r)} \\ \sqrt{E_p + m} \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} \quad (2.472)$$

e queste due relazioni (2.469) e (2.472) mostrano chiaramente come, nel limite di bassa energia, le *piccole* e le *grandi* componenti degli spinori u e v si separino in modo opposto.

⁹⁷Può sembrare che la scelta (2.466) per quanto concerne le v sia quantomeno bizzarra. La ragione è che, come vedremo, nel sistema di quiete, è proprio lo spinore associato a $v_0^{(1)}$ che descrive lo stato di antiparticella di componente di spin $s_z = 1/2$ (ovvero lo stato con energia negativa con $s_z = -1/2$), mentre quello associato a $v_0^{(2)}$ descrive quello con $s_z = -1/2$.

⁹⁸Risulta infatti che, indicando con I l'identità in due dimensioni, esplicitamente risulta

$$(m + \not{p}) = \begin{pmatrix} (m + E_p)I & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & (m - E_p)I \end{pmatrix} ; \quad (m - \not{p}) = \begin{pmatrix} (m - E_p)I & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & (m + E_p)I \end{pmatrix} \quad (2.468)$$

ed usando queste espressioni, le (2.469) e (2.472) seguono immediatamente dalle definizioni (2.464) e (2.465), rispettivamente di $u^{(r)}(\vec{p})$ e $v^{(r)}(\vec{p})$.

⁹⁹Quanto ai vettori bidimensionali $w^{(i)}$ e $\tilde{w}^{(i)}$, risulta

$$\tilde{w}^{(i)} = (-i\sigma_2)_{ji} w^{(j)} \iff w^{(i)} = (i\sigma_2)_{ji} \tilde{w}^{(j)} \quad (2.471)$$

dove σ_2 è la matrice di Pauli, generatore in $SU(2)$ delle rotazioni intorno all'asse y .

Gli spinori u e v descrivono lo stato di spin della particella/antiparticella e giocano, in buona sostanza, lo stesso ruolo giocato, per esempio, dal quadrivettore di polarizzazione $\epsilon^\mu(p)$ del campo vettoriale carico W^μ .

Vediamo intanto quali sono le loro proprietà di trasformazione sotto la rappresentazione del gruppo di Lorentz $S(\Lambda)$ definita, appunto, nello spazio degli spinori. Iniziamo per questo dimostrando che, se Λ_p è il boost di Lorentz definito dalla (2.316), tale per cui, posto $\hat{p} \equiv (m, 0, 0, 0)$, allora $\Lambda_p \hat{p} = p$, risulta semplicemente

$$u^{(s)}(p) = S(\Lambda_p) u^{(s)}(\hat{p}); \quad v^{(s)}(p) = S(\Lambda_p) v^{(s)}(\hat{p}) \quad (2.473)$$

Infatti, per i boosts di Lorentz puri (che agiscono, cioè, senza ruotare gli assi) posto

$$y \equiv th^{-1}v; \quad \vec{n} \equiv \frac{\vec{v}}{v} \quad (2.474)$$

dove \vec{v} è la velocità relativa fra i riferimenti, per la (2.446), sappiamo che risulta

$$S(\vec{v}) = ch \frac{y}{2} I + (\vec{n} \cdot \vec{\alpha}) sh \frac{y}{2} \quad (2.475)$$

dove le matrici $\vec{\alpha}$ sono definite dalla (2.447). Nel nostro caso, abbiamo quindi

$$S(\Lambda_p) = \begin{pmatrix} ch \frac{y}{2} & sh \frac{y}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \\ sh \frac{y}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) & ch \frac{y}{2} \end{pmatrix} \quad (2.476)$$

per cui, in termini dei vettori a due dimensioni $w^{(r)}$ definiti dalla (2.467), per quanto concerne gli spinori u , abbiamo

$$S(\Lambda_p) u^{(r)}(\hat{p}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} ch \frac{y}{2} w^{(r)} \\ sh \frac{y}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w^{(r)} \end{pmatrix} \quad (2.477)$$

D'altronde, in tutta generalità, risulta

$$ch \alpha = 2 ch^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow ch^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + ch \alpha}{2} \Rightarrow ch \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + ch \alpha}{2}} \quad (2.478)$$

e si ha anche

$$1 - th^2 \alpha = \frac{1}{ch^2 \alpha} \Rightarrow ch^2 \alpha = \frac{1}{1 - th^2 \alpha} \quad (2.479)$$

Da quest'ultima relazione, essendo, evidentemente, nel nostro caso $th y = v$, segue che

$$ch y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma \Rightarrow ch \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1 + E/m}{2}} = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \quad (2.480)$$

Analogamente abbiamo

$$sh \frac{y}{2} = \sqrt{ch^2 \frac{y}{2} - 1} = \sqrt{\frac{E+m}{2m} - 1} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \quad (2.481)$$

per cui risulta infine che

$$S(\Lambda_p) u^{(r)}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} w^{(r)} \\ \sqrt{E-m} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w^{(r)} \end{pmatrix} = u^{(r)}(p) \quad (2.482)$$

come mostra la (2.469).

Per lo spinore v risulta analogamente che

$$S(\Lambda_p) v^{(r)}(\hat{p}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} sh \frac{y}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \tilde{w}^{(r)} \\ ch \frac{y}{2} \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} \quad (2.483)$$

dove $\tilde{w}^{(r)}$ sono i vettori di cui alla (2.470).

Per le considerazioni svolte in precedenza parlando degli spinori u , tenendo presente la (2.472), risulta altresì provato che

$$S(\Lambda_p) v^{(r)}(\hat{p}) = v^{(r)}(p) \quad (2.484)$$

Ma veniamo ora al caso generale, i.e. a valutare l'espressione $S(\Gamma) u^{(s)}(p)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} S(\Gamma) u^{(s)}(p) &= S(\Gamma) S(\Lambda_p) u^{(s)}(\hat{p}) = S(\Lambda_{\Gamma p}) S(\Lambda_{\Gamma p}^{-1}) S(\Gamma) S(\Lambda_p) u^{(s)}(\hat{p}) = \\ &= S(\Lambda_{\Gamma p}) S(\Lambda_{\Gamma p}^{-1} \Gamma \Lambda_p) u^{(s)}(\hat{p}) \end{aligned} \quad (2.485)$$

ma $\Lambda_{\Gamma p}^{-1} \Gamma \Lambda_p \equiv \mathcal{R}(\Gamma, p)$ è la rotazione di Wigner individuata da p e Γ , che abbiamo già definito con la (2.338): come ogni rotazione, essa sarà individuata da un opportuno vettore $\vec{\theta} \equiv \theta \vec{n}$, ed avremo allora, per la (2.443), che, in termini di questo vettore, risulterà

$$S(\mathcal{R}(\Gamma, p)) = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) (\vec{n} \cdot \vec{\Sigma}) \quad (2.486)$$

dove le matrici $\vec{\Sigma}$ sono definite dalla (2.444).

Siccome $S(R)$ è evidentemente diagonale rispetto alle grandi/piccole componenti, possiamo dunque definire in modo ovvio la matrice $R(\theta, \vec{n})$ di $SU(2)$ corrispondente alla rotazione $\mathcal{R}(\Gamma, p)$ nel modo seguente

$$R(\theta, \vec{n}) = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \equiv R(\Gamma, p) \quad (2.487)$$

risulta allora

$$S(\mathcal{R}(\Gamma, p)) u^{(s)}(\hat{p}) = R(\Gamma, p)_{ks} u^{(k)}(\hat{p}) \quad (2.488)$$

e quindi, dalla (2.485), finalmente che

$$S(\Gamma) u^{(s)}(p) = R(\Gamma, p)_{ks} u^{(k)}(\Gamma p) \quad (2.489)$$

Per quanto riguarda poi lo spinore v , siccome le rotazioni sono diagonali rispetto alle piccole e grandi componenti ed agiscono su di loro nello stesso modo, la conclusione sarebbe esattamente la stessa di quella tratta per lo spinore u se, nella definizione di $v^{(s)}(p)$, fosse stato scelto il vettore $w^{(s)}$ di cui alla (2.467), invece del vettore $\tilde{w}^{(s)}$ di cui alla (2.470), legati fra loro da una rotazione di 180° intorno all'asse y , essendo infatti

$$\tilde{w}^{(r)} = (-i\sigma_2)_{sr} w^{(s)} \iff w^{(s)} = (i\sigma_2)_{rs} \tilde{w}^{(r)} \quad (2.490)$$

Si dimostra¹⁰⁰ allora che, in termini della stessa matrice $R(\Gamma, p)$ che compare nella

¹⁰⁰Dimostriamo la (2.504).

Applicando le stesse considerazioni svolte per $u^{(s)}(p)$, giungiamo evidentemente alla conclusione per cui

$$S(\Gamma) v^{(s)}(p) = S(\Lambda_{\Gamma p}) S(\mathcal{R}(\Gamma, p)) v^{(s)}(\hat{p}) \quad (2.491)$$

Ma, essendo \mathcal{R} una rotazione, data la sua struttura (2.443), potrà solo rimescolare gli spinori $v^{(k)}(\hat{p})$, $k = 1, 2$ fra di loro, i.e. necessariamente dovrà risultare

$$S(\mathcal{R}(\Gamma, p)) v^{(s)}(\hat{p}) = M_{rs} v^{(r)}(\hat{p}) \Rightarrow S(\Gamma) v^{(s)}(p) = M_{rs} v^{(r)}(\Gamma p) \quad (2.492)$$

dove M sarà una matrice 2×2 opportuna, che adesso vogliamo determinare.

A questo scopo, osserviamo che, ponendo

$$(i\sigma_2)_{sa} v^{(s)}(\hat{p}) \equiv \hat{v}^{(a)} \quad (2.493)$$

data la (2.490)-destra, risulta che questo spinore è definito in termini del vettore $w^{(a)}$ esattamente come $u^{(a)}(\hat{p})$ (a parte l'inversione grandi/piccole componenti, irrilevante per le considerazioni che stiamo svolgendo vista la struttura "diagonale" di $S(\mathcal{R})$), per cui possiamo senz'altro concludere che

$$S(\mathcal{R}(\Gamma, p)) \hat{v}^{(a)} = R_{ba} \hat{v}^{(b)} \quad (2.494)$$

ovvero che

$$(i\sigma_2)_{sa} S(\mathcal{R}(\Gamma, p)) v^{(s)}(\hat{p}) \equiv S(\mathcal{R}(\Gamma, p)) \hat{v}^{(a)} = R_{ba} \hat{v}^{(b)} \equiv R_{ba} (i\sigma_2)_{tb} v^{(t)}(\hat{p}) \quad (2.495)$$

Sostituendo allora nella (2.491), abbiamo

$$\begin{aligned} (i\sigma_2)_{sa} S(\Gamma) v^{(s)}(p) &= (i\sigma_2)_{sa} S(\Lambda_{\Gamma p}) \cdot S(\mathcal{R}(\Gamma, p)) v^{(s)}(\hat{p}) = S(\Lambda_{\Gamma p}) \left[(i\sigma_2)_{sa} S(\mathcal{R}(\Gamma, p)) v^{(s)}(\hat{p}) \right] = \\ &= S(\Lambda_{\Gamma p}) \left[R_{ba} (i\sigma_2)_{tb} v^{(t)}(\hat{p}) \right] = R_{ba} (i\sigma_2)_{tb} v^{(t)}(\Gamma p) \equiv (i\sigma_2 \cdot R)_{ta} v^{(t)}(\Gamma p) \end{aligned} \quad (2.496)$$

ma, per la (2.492), deve essere anche che

$$\begin{aligned} S(\Gamma) v^{(s)}(p) &= M_{rs} v^{(r)}(\Gamma p) \Rightarrow (i\sigma_2)_{sa} S(\Gamma) v^{(s)}(p) = (i\sigma_2)_{sa} M_{rs} v^{(r)}(\Gamma p) \equiv \\ &\equiv (M \cdot i\sigma_2)_{ra} v^{(r)}(\Gamma p) \end{aligned} \quad (2.497)$$

(2.489), cioè dell'elemento $R(\Gamma, p)$ di $SU(2)$ definito dalla rotazione di Wigner

$$\mathcal{R}(\Gamma, p) \equiv \Lambda_{\Gamma p}^{-1} \Gamma \Lambda_p \quad (2.503)$$

risulta adesso

$$S(\Gamma) v^{(s)}(p) = R^*(\Gamma, p)_{ks} v^{(k)}(\Gamma p) \quad (2.504)$$

Quanto infine agli spinori \bar{u} e \bar{v} , siccome vale l'identità $\gamma^0 S^\dagger(\Gamma) \gamma^0 = S^{-1}(\Gamma)$, è facile dimostrare da quanto precede che risulta

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p}) S^{-1}(\Gamma) = R(\Gamma, p)_{ks}^* \bar{u}^{(k)}(\vec{\Gamma p}) \quad (2.505)$$

$$\bar{v}^{(s)}(\vec{p}) S^{-1}(\Gamma) = R(\Gamma, p)_{ks} \bar{v}^{(k)}(\vec{\Gamma p}) \quad (2.506)$$

Dalle definizioni (2.464) e (2.465) segue inoltre che gli spinori u e v soddisfano le relazioni algebriche seguenti¹⁰¹

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) = 2m \delta_{sr} \quad (2.507)$$

e quindi, dal confronto della (2.496) con la (2.497), abbiamo infine che deve essere

$$(M \cdot i\sigma_2) = (i\sigma_2 \cdot R) \Rightarrow M = (i\sigma_2) R (-i\sigma_2) = \sigma_2 R \sigma_2 \quad (2.498)$$

D'altronde, la rotazione $R \equiv R(\Gamma, p)$ di $SU(2)$ avrà necessariamente la struttura usuale di una rotazione, i.e. se \vec{n} individua l'asse di rotazione intorno a cui si procede per un angolo θ , sarà

$$R = e^{-\frac{i}{2}\theta \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = I \cdot \cos(\theta/2) - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin(\theta/2) \quad (2.499)$$

per cui

$$\sigma_2 R \sigma_2 = I \cdot \cos(\theta/2) - i[\vec{n} \cdot (\sigma_2 \vec{\sigma} \sigma_2)] \sin(\theta/2) \quad (2.500)$$

D'altronde è facile verificare che

$$-\sigma_i^* = \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 \quad (2.501)$$

visto che σ_2 è l'unica matrice di Pauli immaginaria pura e che le altre due anticommutano con essa. Dunque

$$M = \sigma_2 R \sigma_2 = e^{\frac{i}{2}\theta \vec{\sigma}^*} = R^* \quad (2.502)$$

che dimostra, appunto, la (2.504).

¹⁰¹Dalla definizione (2.464), usando la (2.455) e la (2.469), segue immediatamente che

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(s)}(p) u^{(r)}(p) &= \bar{u}^{(s)}(0) \frac{(\not{p} + m)(\not{p} + m)}{m + E_p} u^{(r)}(0) = \\ &= \frac{2m}{m + E_p} \bar{u}^{(s)}(0) (\not{p} + m) u^{(r)}(0) = 2m \delta_{rs} \end{aligned}$$

la quale dimostra appunto la (2.507).

Un altro modo per arrivare alla stessa conclusione è quello di osservare che $\bar{u} u$ è scalare per trasformazioni di Lorentz, data la (2.473), e dunque basta valutarlo nel sistema del centro di

$$u^{\dagger(s)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) = 2E_p \delta_{sr} \quad (2.508)$$

$$v^{\dagger(s)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) = 2E_p \delta_{sr} \quad (2.509)$$

$$\bar{v}^{(s)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) = -2m \delta_{sr} \quad (2.510)$$

Passiamo adesso a definire i proiettori Λ_{\pm} sugli stati di energia positiva e negativa. Dalla definizioni delle u e delle v , unitamente alle (2.455) e (2.456), risulta evidente che questi proiettori, una volta fissato il quadrimpulso p^{μ} , non possono che essere i seguenti

$$\Lambda_{\pm} \equiv \Lambda_{\pm}(p) = \frac{m \pm \not{p}}{2m} \quad (2.511)$$

massa dove, evidentemente, esso vale proprio $2m \delta_{rs}$

Veniamo ora alla dimostrazione esplicita della (2.508). Per l'equazione di Dirac, si ha

$$\bar{u}(p) (\not{p} - m) = 0 = (\not{p} - m) u(p)$$

e quindi risulta

$$\bar{u}(p) [(\not{p} - m) \gamma^{\mu} + \gamma^{\mu} (\not{p} - m)] u(p) = 0$$

ovvero

$$2m \bar{u}(p) \gamma^{\mu} u(p) - \bar{u}(p) \{\not{p}, \gamma^{\mu}\} u(p) = 0$$

d'altronde

$$\{\not{p}, \gamma^{\mu}\} = p_{\nu} \{\gamma^{\nu}, \gamma^{\mu}\} = p_{\nu} 2\delta^{\mu\nu} = 2p^{\mu}$$

dunque

$$2m \bar{u}(p) \gamma^{\mu} u(p) - 2p^{\mu} \bar{u}(p) u(p) = 0$$

la quale ci dice che $\bar{u}(p) \gamma^{\mu} u(p) = \frac{p^{\mu}}{m} \bar{u}(p) u(p)$ ovvero che $\bar{u}(p) \gamma^{\mu} u(p)$ è un quadrivettore, visto che prima abbiamo dimostrato che $\bar{u}(p) u(p)$ è uno scalare.

Va notato ancora una volta che il fatto che $\bar{u}(p) \gamma^{\mu} u(p)$ sia un quadrivettore potevamo dedurlo anche direttamente, infatti, sempre per la (2.473), risulta

$$\bar{u}(p) \gamma^{\mu} u(p) = \bar{u}(\hat{p}) S^{-1}(\Lambda_p) \gamma^{\mu} S(\Lambda_p) u(\hat{p}) = (\Lambda_p)^{\mu}_{\nu} \bar{u}(\hat{p}) \gamma^{\nu} u(\hat{p})$$

D'altronde, per come sono definiti, $\bar{u}^{(s)}(\hat{p}) \gamma^{\nu} u^{(r)}(\hat{p}) = (2m, 0, 0, 0) \delta_{rs} = 2\hat{p} \delta_{rs}$ e dunque ritroviamo appunto che vale la relazione

$$\bar{u}^{(r)}(p) \gamma^{\mu} u^{(s)}(p) = 2p^{\mu} \delta_{rs}$$

Facendo allora $\mu = 0$, si ottiene infine la (2.508).

Analogamente si procede poi nei casi (2.509) e (2.510).

Infatti¹⁰²

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = I \quad (2.514)$$

$$(\Lambda_\pm)^2 = \Lambda_\pm \quad (2.515)$$

$$\Lambda_+ \Lambda_- = 0 \quad (2.516)$$

$$\Lambda_+ u = u; \quad \Lambda_+ v = 0 \quad (2.517)$$

$$\Lambda_- u = 0; \quad \Lambda_- v = v \quad (2.518)$$

ovvero essi proiettano rispettivamente sugli stati individuati dagli spinori $u(p)$ (il proiettore $\Lambda_+(p)$), che descrivono, in prima quantizzazione, stati con energia positiva e su quelli individuati dagli spinori $v(p)$ (il proiettore $\Lambda_-(p)$), che, sempre in prima quantizzazione, sono associati agli stati con energia negativa.

Un altro modo di rappresentare questi proiettori (teorema di Casimir) è il seguente¹⁰³

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2m} \sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}_\beta^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{2m} \sum_r \left(u^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \right)_{\alpha\beta} \quad (2.519)$$

$$(\Lambda_-)_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2m} \sum_r v_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{v}_\beta^{(r)}(\vec{p}) = -\frac{1}{2m} \sum_r \left(v^{(r)}(\vec{p}) \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) \right)_{\alpha\beta} \quad (2.520)$$

Vediamolo nel caso di Λ_+ : dalla definizione, risulta

$$\begin{aligned} (\Lambda_+)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2m(m + E_p)} \left\{ \sum_r (\not{p} + m) u_0^{(r)} \bar{u}_0^{(r)} (\not{p} + m) \right\}_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{2m(m + E_p)} \left\{ (\not{p} + m) \left[\sum_r u_0^{(r)} \bar{u}_0^{(r)} \right] (\not{p} + m) \right\}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.521)$$

ma in rappresentazione di Dirac-Pauli risulta (gli u_0 sono reali ...)

$$\sum_r u_0^{(r)} \bar{u}_0^{(r)} = \frac{1 + \gamma^0}{2} \equiv \sum_r u_0^{(r)} u_0^{\dagger(r)} \quad (2.522)$$

dunque

$$\begin{aligned} (\Lambda_+)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2m(m + E_p)} (\not{p} + m) \frac{1 + \gamma^0}{2} (\not{p} + m) = \\ &= \frac{1}{2m(m + E_p)} \left[\frac{1}{2} (\not{p} + m)(\not{p} + m) + \frac{1}{2} (\not{p} + m) \gamma^0 (\not{p} + m) \right] \end{aligned} \quad (2.523)$$

¹⁰²Si osservi che, poiché per la (A.9) risulta che $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$, ne segue che $(\gamma^0 \gamma^0 = 1 \dots)$

$$(\Lambda_\pm)^\dagger = \gamma^0 \Lambda_\pm \gamma^0 \quad (2.512)$$

e dunque, data comunque una soluzione ψ , se definiamo $\psi_\pm \equiv \Lambda_\pm \psi$, risulta che

$$\bar{\psi}_\pm \equiv (\psi_\pm)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger (\Lambda_\pm)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \Lambda_\pm \gamma^0 \gamma^0 = \bar{\psi} \Lambda_\pm \quad (2.513)$$

ovvero i proiettori Λ_\pm agiscono nella stessa forma sia sulle ψ che sulle $\bar{\psi}$.

¹⁰³La sommatoria sull'indice r è estesa, ovviamente, da 1 a 2.

D'altronde, tenendo conto delle proprietà di anticommutazione delle matrici gamma, risulta

$$\begin{aligned}\gamma^0(\not{p} + m) &= m\gamma^0 + p_0\gamma^0\gamma^0 + p_i\gamma^0\gamma^i = m\gamma^0 + p_0\gamma^0\gamma^0 - p_i\gamma^i\gamma^0 = \\ &= m\gamma^0 + 2p_0\gamma^0\gamma^0 - \not{p}\gamma^0 = 2E_p + (m - \not{p})\gamma^0\end{aligned}\quad (2.524)$$

quindi, usando anche la (2.455), si ha infine che

$$\begin{aligned}\Lambda_+ &= \frac{1}{2m(m + E_p)} \left\{ m(\not{p} + m) + \frac{1}{2}(\not{p} + m) [2E_p + (m - \not{p})\gamma^0] \right\} = \\ &= \frac{1}{2m(m + E_p)} \{ m(\not{p} + m) + E_p(\not{p} + m) \} = \frac{\not{p} + m}{2m}\end{aligned}\quad (2.525)$$

Analogamente si dimostra che risulta altresì¹⁰⁴

$$\Lambda_- = \frac{-\not{p} + m}{2m}\quad (2.527)$$

Torniamo adesso alle soluzioni dell'equazione di Dirac. Noi sappiamo che, fissato un impulso spaziale qualunque \vec{p} , esse sono quattro, per cui è ragionevole aspettarci che potranno esistere altri operatori di proiezione i quali

- commutano con Λ_{\pm} ;
- separano le soluzioni $r = 1, 2$.

D'altronde, queste soluzioni, distinte dall'indice r , hanno a che fare con le due possibili direzioni di polarizzazione dello spin, per cui ci dobbiamo attendere che questi operatori Π_{\pm} siano una sorta di generalizzazione del proiettore non relativistico dello spin che, nella direzione del generico versore \vec{n} , come è noto, è dato, a seconda che il verso sia quello di \vec{n} oppure il suo opposto, da

$$\Pi_{\pm\vec{n}} \equiv \frac{1 \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}\quad (2.528)$$

Il primo problema da risolvere, ovviamente, riguarda il modo di generalizzare la direzione \vec{n} in cui effettuare la proiezione: se vogliamo rendere la definizione covariante¹⁰⁵ occorre che questa sia definita tramite un quadrivettore che, nel

¹⁰⁴Si ricordi che, pur essendo anche in questo caso gli spinori v_0 reali, risulta però

$$\sum_r v_0^{(r)} \bar{v}_0^{(r)} = -\frac{1 - \gamma^0}{2} \equiv -\sum_r v_0^{(r)} v_0^{\dagger(r)}\quad (2.526)$$

¹⁰⁵Come vedremo, questa condizione, in generale, non sarà possibile realizzarla per ogni trasformazione di riferimento, ma solo per le trasformazioni da e verso il CM .

sistema del centro di massa individui una direzione spaziale, ovvero sia della forma $(0, \vec{n})$. Questa richiesta è praticamente già sufficiente allo scopo, infatti ci dice che il quadrivettore n^μ che stiamo cercando dovrà essere tale che

$$n^\mu n_\mu = -1; \quad n^\mu p_\mu = 0 \quad (2.529)$$

Queste condizioni restringono i gradi di libertà su n^μ a solo due, e questo è appunto il numero di gradi di libertà che ci aspettiamo per n^μ , visto che una direzione nello spazio è fissata in termini di soli due angoli. Osserviamo altresì che le condizioni (2.529) non possono fissare il segno del quadrivettore n , e questa ambiguità di segno corrisponde ai due versi possibili associati alla direzione data. Proviamo dunque, tentativamente, a definire i proiettori di spin nel modo seguente

$$\Pi_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5 \not{n}) \quad (2.530)$$

dove γ_5 , come si è già detto, è definita dalla (2.434). Risulta¹⁰⁶ allora quanto

¹⁰⁶Iniziamo dimostrando la (2.538).

Si ha (l'arbitrarietà di segno è presente in entrambi i proiettori ...)

$$\left[\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2}, \frac{m \pm \not{p}}{2m} \right] = \frac{\pm 1}{4m} [\gamma_5 \not{n}, \not{p}] \quad (2.531)$$

ma

$$[\gamma_5 \not{n}, \not{p}] = n_\mu p_\nu (\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma_5 \gamma^\mu) \quad (2.532)$$

e poiché γ_5 anticommute con le γ^μ , ne segue che

$$[\gamma_5 \not{n}, \not{p}] = n_\mu p_\nu \gamma_5 (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = n_\mu p_\nu \gamma_5 \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \gamma_5 n_\mu p^\mu = 0 \quad (2.533)$$

che prova quindi la (2.538).

Passiamo adesso a dimostrare la (2.539). Risulta

$$\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \cdot \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{1 \pm 2\gamma_5 \not{n} + \gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n}}{4} \quad (2.534)$$

ma

$$\gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n} = n_\mu n_\nu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu = -n_\mu n_\nu (\gamma_5)^2 \gamma^\mu \gamma^\nu = -n_\mu n_\nu \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -n_\mu n^\mu = 1 \quad (2.535)$$

per cui

$$\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \cdot \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{2 \pm 2\gamma_5 \not{n}}{4} = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \quad (2.536)$$

che prova appunto la (2.539).

Quanto poi alla (2.540), essa è evidente. Passando quindi alla (2.541), essa segue dalla (2.535), infatti

$$\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \cdot \frac{1 \mp \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{1 - \gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n}}{4} = 0 \quad (2.537)$$

segue

$$[\Pi_{\pm}, \Lambda_{\pm}] = 0 \quad (2.538)$$

$$(\Pi_{\pm})^2 = \Pi_{\pm} \quad (2.539)$$

$$\Pi_+ + \Pi_- = I \quad (2.540)$$

$$\Pi_+ \Pi_- = 0 \quad (2.541)$$

Gli operatori¹⁰⁷ Π_{\pm} così definiti hanno quindi le caratteristiche di proiettori che commutano con le Λ_{\pm} .

Proviamo adesso a vedere quali sono le loro proprietà di trasformazione nel passare dal sistema del Laboratorio, dove l'impulso della particella è p^{μ} ed il proiettore è individuato dal quadrivettore n^{μ} , al sistema del CM .

Per fissare le idee, occupiamoci di Π_+ e supponiamo, per esempio, che sia

$$\Pi_+ (\alpha_s u^{(s)}(\vec{p})) = \alpha_s u^{(s)}(\vec{p}) \quad (2.546)$$

Il secondo membro dell'equazione (2.546) può, però, scriversi anche come

$$\alpha_s u^{(s)}(\vec{p}) = \alpha_s S(\Lambda_p) u^{(s)}(\hat{p}) = S(\Lambda_p) (\alpha_s u^{(s)}(\hat{p})) \quad (2.547)$$

mentre, per quanto riguarda il primo membro, abbiamo

$$\begin{aligned} \Pi_+ [\alpha_s u^{(s)}(\vec{p})] &= \Pi_+ [S(\Lambda_p) (\alpha_s u^{(s)}(\hat{p}))] = \\ &= S(\Lambda_p) S^{-1}(\Lambda_p) \Pi_+ S(\Lambda_p) [\alpha_s u^{(s)}(\hat{p})] \end{aligned} \quad (2.548)$$

¹⁰⁷Anche per i proiettori Π_{\pm} vale la stessa conclusione già tratta per i proiettori Λ_{\pm} ovvero che essi agiscono nella stessa forma sia sulle ψ che sulle $\bar{\psi}$. Infatti

$$(\Pi_{\pm})^{\dagger} = \left(\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \right)^{\dagger} = \left(\frac{1 \pm \not{n}^{\dagger} \gamma_5^{\dagger}}{2} \right) \quad (2.542)$$

ma, sia per il fatto che $\gamma_5^{\dagger} = \gamma_5$ che per il fatto che (cfr. (2.435)) $(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0$, unitamente al fatto che γ^5 anticommuta con le γ^{μ} , ne segue che

$$\not{n}^{\dagger} \gamma_5^{\dagger} = n_{\mu} (\gamma^{\mu})^{\dagger} \gamma_5 = n_{\mu} \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0 \gamma_5 = n_{\mu} \gamma^0 \gamma_5 \gamma^{\mu} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma_5 \not{n} \gamma^0 \quad (2.543)$$

e dunque, essendo $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, risulta che

$$(\Pi_{\pm})^{\dagger} = \left(\frac{1 \pm \not{n}^{\dagger} \gamma_5^{\dagger}}{2} \right) = \gamma^0 \Pi_{\pm} \gamma^0 \quad (2.544)$$

per cui, assegnata comunque una soluzione ψ , se definiamo $\psi_{\pm} \equiv \Pi_{\pm} \psi$, risulta appunto che

$$\bar{\psi}_{\pm} \equiv (\psi_{\pm})^{\dagger} \gamma^0 = \psi^{\dagger} (\Pi_{\pm})^{\dagger} \gamma^0 = \psi^{\dagger} \gamma^0 \Pi_{\pm} \gamma^0 \gamma^0 = \bar{\psi} \Pi_{\pm} \quad (2.545)$$

e dal confronto delle due espressioni abbiamo quindi che

$$S^{-1}(\Lambda_p) \Pi_+ S(\Lambda_p) [\alpha_s u^{(s)}(\hat{p})] \equiv \Pi' [\alpha_s u^{(s)}(\hat{p})] = \alpha_s u^{(s)}(\hat{p}) \quad (2.549)$$

ovvero il fatto che $\alpha_s u^{(s)}(\vec{p})$ sia proiettato in sé dal proiettore Π_+ è equivalente a dire che il suo stato trasformato nel CM è trasformato in sé dall'operatore Π' : quest'ultimo, in buona sostanza, rappresenta nel CM quello che il proiettore Π_+ rappresenta nel Laboratorio. Ma le proprietà di trasformazione delle matrici γ^μ e γ_5 sotto la rappresentazione spinoriale dicono che

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma_5 n_\mu \gamma^\mu S(\Lambda) = n_\mu \gamma_5 S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma_5 \Lambda_\nu^\mu n_\mu \gamma^\nu = \gamma_5 (\Lambda^{-1} n)_\nu \gamma^\nu \quad (2.550)$$

la quale consente di concludere infine che

- Π' è esso stesso un proiettore del tipo di Π_+ , individuato dal quadrivettore $\Lambda_p^{-1} n$,
- descrive nel CM la stessa proiezione descritta nel sistema del Laboratorio dal proiettore Π_+ .

Il passaggio $Lab \leftrightarrow CM$ attraverso il boost Λ_p^{-1} si manifesta dunque sul proiettore Π_+ in modo covariante.

Vediamo adesso che i proiettori Π_\pm nel CM coincidono proprio con proiettori di spin non relativistici $\Pi_{\pm \vec{n}}$!

Infatti, nel riferimento di quiete, evidentemente, deve essere

$$n^\mu = (0, \vec{n}) \quad \text{con} \quad |\vec{n}|^2 = 1 \quad (2.551)$$

e dunque

$$\not{n} = n_i \gamma^i = -n^i \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{n} \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.552)$$

ovvero risulta

$$\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5 \not{n}) = \begin{pmatrix} \frac{1 \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 \mp \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix} \quad (2.553)$$

da cui segue, in particolare, che, posto $\vec{n} = (0, 0, 1)$, risulta

$$\Pi_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \Pi_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.554)$$

e dunque¹⁰⁸ gli stati $u_0^{(1)}$ e $v_0^{(1)}$ sono proiettati in se stessi da Π_+ mentre sono annichilati da Π_- e, viceversa, gli stati $u_0^{(2)}$ e $v_0^{(2)}$ sono proiettati in se stessi da Π_- mentre sono annichilati da Π_+ , coerentemente con il fatto che, sia per gli stati di particella che di antiparticella, $r = 1$ individua l'autostato della componente z dello spin con autovalore $+1/2$ e $r = 2$ quello con autovalore $-1/2$, i.e.

$$u^{(1)} \rightarrow s_z = +1/2; \quad u^{(2)} \rightarrow s_z = -1/2 \quad (2.555)$$

$$v^{(1)} \rightarrow s_z = +1/2; \quad v^{(2)} \rightarrow s_z = -1/2 \quad (2.556)$$

L'interesse di aver scritto il proiettore di spin Π_\pm nella forma (2.530) sta nel fatto che, come si è già osservato, esso è covariante per boosts di Lorentz $Lab \rightarrow CM$ e quindi l'effetto del proiettore può essere valutato facilmente in ogni riferimento inerziale, riportandoci al sistema del CM con il boost opportuno.

Ma che succede, in generale, per quanto riguarda la forma del proiettore, nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro, che non sia quello del CM ?

Potrebbe sembrare che, di nuovo, basti trasformare n^μ usando la trasformazione di Lorentz che connette i due riferimenti ... ma purtroppo non è così !

Supponiamo di partire dunque da un sistema inerziale dove il quadrimpulso della particella è p^μ ed il quadrivettore di spin che ci interessa è n^μ .

Se effettuiamo una trasformazione di Lorentz Γ , per cui il quadrimpulso della particella diventa $p' = \Gamma p$, quale deve essere il quadrivettore n' che individua lo stesso proiettore di spin già individuato da n ?

Come abbiamo visto, la prescrizione è che i boosts inversi definiscano nel CM lo stesso quadrivettore, i.e.

$$\Lambda_{\Gamma p}^{-1} n' = \Lambda_p^{-1} n \Leftrightarrow n' = \Lambda_{\Gamma p} \cdot \Lambda_p^{-1} n \quad (2.557)$$

La trasformazione che dovevamo individuare è dunque proprio $\Lambda_{\Gamma p} \cdot \Lambda_p^{-1}$!

Ma come è fatta ?

Chiaramente se la facciamo agire sul quadrivettore p essa lo trasforma in Γp , dunque $\Gamma^{-1} \cdot \Lambda_{\Gamma p} \cdot \Lambda_p^{-1}$ lascia p invariato e quindi deve essere della forma seguente

$$\Gamma^{-1} \cdot \Lambda_{\Gamma p} \cdot \Lambda_p^{-1} = \Lambda_p \cdot R \cdot \Lambda_p^{-1} \quad (2.558)$$

dove R è a priori una rotazione opportuna che, nel caso nostro, come adesso vedremo, risulta essere proprio l'inversa della rotazione di Wigner $\mathcal{R}(p, \Gamma)$.

Infatti, dalla equazione precedente, si ricava subito che

$$R = \Lambda_p^{-1} \cdot \Gamma^{-1} \cdot \Lambda_{\Gamma p} = \left(\Lambda_{\Gamma p}^{-1} \cdot \Gamma \cdot \Lambda_p \right)^{-1} = \mathcal{R}(p, \Gamma)^{-1} \quad (2.559)$$

¹⁰⁸Come mostra la (2.553), la forma dei proiettori di spin Π_\pm sulle grandi e sulle piccole componenti degli spinori è "opposta": questa è la ragione delle scelte apparentemente anomale di $v_0^{(1)}$ e $v_0^{(2)}$, ottenuti per rotazione di 180° intorno all'asse y (i.e. attraverso la rotazione $-i\sigma_y$) degli spinori a due componenti che definiscono, rispettivamente, $u_0^{(1)}$ e $u_0^{(2)}$.

L'opportunità della definizione delle $v_0^{(r)}$ sarà ancora più evidente allorché considereremo, tra breve, la forma che assume la simmetria di coniugazione di carica sulle soluzioni dell'equazione di Dirac.

per cui, in conclusione, se n individua il proiettore di spin laddove il quadrimpulso della particella è p ed n' vogliamo sia quello che individua lo stesso proiettore laddove il quadrimpulso della particella è Γp , allora n' si ottiene da n attraverso la trasformazione di Lorentz

$$\Gamma \cdot (\Lambda_p \cdot \mathcal{R}(p, \Gamma)^{-1} \cdot \Lambda_p^{-1}) \quad (2.560)$$

la quale coincide quindi con Γ solo se la rotazione di Wigner che compare nella sua definizione è la rotazione identica, ovvero se Γ è esso stesso un boost che avviene nella direzione di \vec{p} , senza ruotare gli assi.

Vediamo adesso di arrivare ad una rappresentazione parametrica significativa del quadrivettore di spin n^μ .

Iniziamo dimostrando che se p^μ è il quadrimpulso di una particella di massa m e k^μ è un qualunque quadrivettore light-like, allora possiamo sempre trovare uno ed un solo (a parte il segno) quadrivettore di *polarizzazione* n^μ della forma seguente

$$n^\mu = \alpha p^\mu + \beta k^\mu \quad (2.561)$$

che soddisfa, quindi, le condizioni di cui alla (2.529).

Cominciamo ad imporre la condizione di ortogonalità con il quadrimpulso: si ha

$$np = 0 \Rightarrow \alpha m^2 + \beta (pk) = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{\alpha m^2}{(pk)} \quad (2.562)$$

D'altronde, dalla condizione di normalizzazione di n , si ricava che deve anche essere

$$nn = -1 \Rightarrow \alpha^2 m^2 + 2\alpha\beta (pk) = -1 \quad (2.563)$$

e sostituendo allora la (2.562) nella (2.563), si ha

$$\alpha^2 m^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{m} \quad (2.564)$$

e, di conseguenza¹⁰⁹

$$\beta = \mp \frac{m}{(pk)} \quad (2.565)$$

¹⁰⁹Si noti che il prodotto scalare (pk) non può, in nessun caso, essere nullo. Esso è infatti un invariante di Lorentz e nel riferimento in cui la particella è ferma (riferimento del CM) esso vale $m \hat{k}^0$, dove abbiamo indicato con $(\hat{k}^0, \vec{\hat{k}})$ la forma assunta dal quadrivettore k^μ nel riferimento del CM . Dalle proprietà elementari dei vettori time-like, sappiamo che, necessariamente, $\hat{k}^0 \neq 0$ perchè un quadrivettore light-like non può mai avere la componente temporale nulla, in nessun riferimento.

Abbiamo così trovato che il problema che ci eravamo posti ha soluzione, anzi ne ha due opposte¹¹⁰, che sono

$$n^\mu = \mp \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{(pk)} k^\mu - p^\mu \right) \quad (2.566)$$

Volendo usare questi quadrivettori per definire il proiettore di spin, il fatto di averne trovati due opposti non amplia il numero delle soluzioni indipendenti perché, evidentemente, si ha

$$\Pi_\pm(n^\mu) = \Pi_\mp(-n^\mu)$$

Dati p^μ e k^μ in un riferimento assegnato, possiamo dunque, senza perdita alcuna di generalità, limitarci a considerare i soli quadrivettori di spin n^μ di cui alla (2.566), corrispondenti alla sola scelta di $\alpha = -1/m$, i.e.

$$n^\mu = \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{(pk)} k^\mu - p^\mu \right) \quad (2.567)$$

anche se, come vedremo, è più comodo mantenere comunque entrambe le scelte possibili di α , ovvero entrambi i segni come dalla (2.566).

Per conoscere, in generale, quale direzione di polarizzazione è individuata da questa soluzione, occorrerà riportarsi nel centro di massa senza ruotare gli assi e cioè sarà necessario applicare ad n^μ l'inversa della trasformazione di Lorentz definita dalla (2.316), cioè il boost Λ_p^{-1} tale che $\Lambda_p^{-1} p = (m, 0, 0, 0) \equiv \hat{p}$.

Come abbiamo appreso a suo tempo, la matrice Λ_p^{-1} è così definita

$$\Lambda_p^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} & -\frac{p_x}{m} & -\frac{p_y}{m} & -\frac{p_z}{m} \\ -\frac{p_x}{m} & 1 + \frac{p_x p_x}{m(E+m)} & \frac{p_x p_y}{m(E+m)} & \frac{p_x p_z}{m(E+m)} \\ -\frac{p_y}{m} & \frac{p_y p_x}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_y p_y}{m(E+m)} & \frac{p_y p_z}{m(E+m)} \\ -\frac{p_z}{m} & \frac{p_z p_x}{m(E+m)} & \frac{p_z p_y}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_z p_z}{m(E+m)} \end{pmatrix} \quad (2.568)$$

In questo modo, evidentemente

$$-\frac{1}{m} p^\mu \rightarrow (-1, 0, 0, 0) \quad (2.569)$$

mentre, indicando con \hat{k}^μ l'espressione assunta dal quadrivettore k nel riferimento del CM definito a partire dal riferimento del Laboratorio attraverso la trasformazione Λ_p^{-1} , avremo

$$\frac{m^2}{m(pk)} k^\mu \rightarrow \frac{1}{\hat{k}_0} \hat{k}^\mu = (1, \frac{\vec{k}}{\hat{k}_0}) \quad (2.570)$$

¹¹⁰Il fatto di aver trovato due soluzioni opposte è già scritto nelle equazioni (2.529) che definiscono il quadrivettore n^μ : esse non possono distinguere il segno, quindi se n^μ è soluzione, allora anche $-n^\mu$ lo è.

Su questo punto ritorneremo, comunque, più oltre.

e dunque risulta che, nel CM , il quadrivettore n^μ che descrive la direzione di polarizzazione (2.567) diventa

$$n^\mu \rightarrow (0, \vec{\eta}), \quad \text{dove} \quad \vec{\eta} \equiv \frac{\vec{k}}{\hat{k}^0} \quad (2.571)$$

per cui, in conclusione, avendo scelto n^μ nella forma (2.567), è unicamente la parte spaziale $\vec{\eta}$ del quadrivettore k^μ vista nel sistema di riferimento del CM a definire la *direzione ed il verso* nel quale viene effettuata la proiezione dello spin dall'operatore

$$\Pi = \frac{1 + \gamma_5 \not{\eta}}{2}$$

ed il proiettore Π_- diventa, in questo senso, ridondante¹¹¹.

¹¹¹La scelta (2.567) di limitarsi ad usare solo il segno positivo nella (2.566), come abbiamo già osservato, non conduce a nessuna limitazione sui possibili valori di $\vec{\eta}$ e quindi essa è in grado, a priori, di descrivere la proiezione dello spin in qualunque direzione. L'arbitrarietà nella scelta del segno nella (2.566) deve essere dunque una specie di ridondanza... Cerchiamo di vederne meglio il significato e la ragione per la quale è meglio mantenerla ! Immaginiamo quindi di aver fissato in modo arbitrario la direzione del versore $\vec{\eta}$ nel riferimento del CM . Costruiamo dunque il quadrivettore light-like

$$\hat{k}^\mu \equiv (1, \vec{\eta}) \quad (2.572)$$

e quindi poniamo

$$k = \Lambda(p) \hat{k} \quad (2.573)$$

dove $\Lambda(p) = \Lambda(p^0, \vec{p}) = \Lambda^{-1}(p^0, -\vec{p})$ essendo $\Lambda^{-1}(p)$ il boost definito dalla (2.568).

Evidentemente allora (si ricordi che, per definizione $p \cdot k = \hat{p} \cdot \hat{k} = m$)

$$n^\mu = \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{(pk)} k^\mu - p^\mu \right) = k^\mu - \frac{p^\mu}{m} \quad (2.574)$$

individua la polarizzazione lungo $\vec{\eta}$ nel riferimento dove il quadrimpulso della particella è p^μ . Ma noi sappiamo anche che $-n^\mu$ (segno negativo nella (2.566)) individua la polarizzazione opposta, i.e.

$$\vec{\eta} \leftrightarrow k^\mu - \frac{p^\mu}{m} \quad (2.575)$$

$$-\vec{\eta} \leftrightarrow \frac{p^\mu}{m} - k^\mu \quad (2.576)$$

Però il proiettore nella direzione $-\vec{\eta}$, secondo la definizione di cui sopra, dovrebbe essere costruito a partire dal quadrivettore light-like (che ovviamente non è l'opposto del quadrivettore \hat{k} definito dalla (2.572) !)

$$\hat{k}'^\mu \equiv (1, -\vec{\eta}) \quad (2.577)$$

L'espressione generale del quadrivettore di spin che abbiamo studiato per le particelle di Dirac massive

$$n^\mu = \pm \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{(p \cdot q)} q^\mu - p^\mu \right) \quad (2.584)$$

consente anche di inferire¹¹² il comportamento della polarizzazione nel caso di massa nulla, che assumeremo di raggiungere passando al limite per $\gamma \rightarrow \infty$. Iniziamo osservando che, nel riferimento assegnato dove

$$p^\mu = E (1, \vec{\beta}) \equiv m\gamma (1, \vec{\beta}) \quad (2.585)$$

definendo poi, analogamente a quanto sopra,

$$k' = \Lambda(p) \hat{k}' \quad (2.578)$$

e quindi ponendo (segno positivo nella (2.566))

$$n'^\mu = \hat{k}'^\mu - \frac{p^\mu}{m} \quad (2.579)$$

Quale è dunque il legame fra i due quadrivettori $\frac{p^\mu}{m} - k^\mu$ e $\hat{k}'^\mu - \frac{p^\mu}{m}$?

La risposta è che essi coincidono.

Possiamo vedere questo in vari modi, per esempio applicando loro il boost $\Lambda^{-1}(p)$, abbiamo

$$\Lambda^{-1}(p) \left(\frac{p^\mu}{m} - k^\mu \right) = (1, \vec{0}) - (1, \vec{\eta}) = (0, -\vec{\eta}) \quad (2.580)$$

$$\Lambda^{-1}(p) \left(\hat{k}'^\mu - \frac{p^\mu}{m} \right) = (1, -\vec{\eta}) - (1, \vec{0}) = (0, -\vec{\eta}) \quad (2.581)$$

Siccome il boost è una trasformazione invertibile, è provato che $\frac{p^\mu}{m} - k^\mu = \hat{k}'^\mu - \frac{p^\mu}{m}$.

Un altro modo per dimostrare la stessa cosa fa uso del fatto che, dalla loro definizione, risulta

$$k'^\mu + k^\mu = \Lambda(p)(2, \vec{0}) = \frac{2}{m} \Lambda_p \hat{p} = \frac{2}{m} p^\mu \quad (2.582)$$

e quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} n^\mu(-\vec{\eta}) &= k'^\mu - \frac{p^\mu}{m} = (k'^\mu + k^\mu) - k^\mu - \frac{p^\mu}{m} = \\ &= \frac{2}{m} p^\mu - k^\mu - \frac{p^\mu}{m} = \frac{p^\mu}{m} - k^\mu = -n^\mu(\vec{\eta}) \end{aligned} \quad (2.583)$$

Concludendo, se è vero che nella (2.566) potremmo certamente limitarci ad un solo segno, mantenendo il doppio segno questo, pur non ampliando le soluzioni possibili, facilita, per esempio, l'individuazione del quadrivettore $n^\mu(-\vec{\eta})$ che proietta lo spin nella direzione opposta a quello in cui lo proietta $n^\mu(\vec{\eta})$, potendo porre, semplicemente $n^\mu(-\vec{\eta}) = -n^\mu(\vec{\eta})$.

¹¹²Il limite in questione va preso, comunque, con grande cautela perché esso conduce ad un risultato che viola sia la condizione $n \cdot p = 0$ che quella per cui $n \cdot n = -1$. Questo accade perché la condizione di massa nulla, in realtà, non è raggiungibile attraverso un'operazione di limite a partire dal caso $m \neq 0$...

possiamo sempre scegliere il quadrivettore¹¹³ light-like che compare nella (2.584) nel sistema del laboratorio, in modo che sia

$$q^\mu = (1, \vec{n}) \quad (2.586)$$

con \vec{n} versore a priori qualsiasi, in quanto, per la (2.584) n^μ non cambia sotto la trasformazione $q^\mu \rightarrow \alpha q^\mu$ con α reale qualsiasi non nullo. Risulta allora

$$\begin{aligned} n^\mu &= \pm \left(\frac{m}{m\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} (1, \vec{n}) - \gamma(1, \vec{\beta}) \right) = \\ &= \pm \left(\frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \beta \cos\theta} (1, \vec{n}) - \gamma(1, \vec{\beta}) \right) \end{aligned} \quad (2.587)$$

Chiaramente, se $\vec{\beta}$ ed \vec{n} non sono paralleli e concordi, ovvero se $\cos\theta \neq 1$, il primo termine nell'espressione (2.587) diventa trascurabile nel limite in cui $\gamma \rightarrow \infty$ e dunque risulta

$$n^\mu \rightarrow \mp \frac{p^\mu}{m} \quad (2.588)$$

ovvero n^μ finisce per descrivere solo comunque polarizzazioni longitudinali.

Questo accade anche se $\cos\theta = 1$, i.e. quando $\vec{\beta} = \beta\vec{n}$.

In questo caso infatti, nel limite in cui $\beta \rightarrow 1$, risulta

$$\begin{aligned} n^\mu &= \pm \left[\frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \beta} (1, \vec{n}) - \gamma(1, \vec{\beta}) \right] = \\ &= \pm \left[\frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \beta} (1, \vec{\beta}) + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \beta} (0, (1 - \beta)\vec{n}) - \gamma(1, \vec{\beta}) \right] \approx \\ &\approx \pm (1, \vec{\beta}) \left[\frac{1}{\gamma(1 - \beta)} - \gamma \right] = \pm (1, \vec{\beta}) \frac{1 - \gamma^2(1 - \beta)}{\gamma(1 - \beta)} \end{aligned} \quad (2.589)$$

ma

$$1 - \gamma^2(1 - \beta) = 1 - \frac{1 - \beta}{1 - \beta^2} = \frac{1 - \beta^2 - 1 + \beta}{1 - \beta^2} = \gamma^2\beta(1 - \beta)$$

e dunque anche in questo caso, nel limite ultrarelativistico risulta

$$\begin{aligned} n^\mu &\rightarrow \pm (1, \vec{\beta}) \frac{1 - \gamma^2(1 - \beta)}{\gamma(1 - \beta)} = \pm (1, \vec{\beta}) \frac{\gamma^2\beta(1 - \beta)}{\gamma(1 - \beta)} = \\ &= \pm (1, \vec{\beta}) \beta\gamma \approx \pm \frac{p^\mu}{m} \end{aligned} \quad (2.590)$$

¹¹³Si ricordi che \vec{n} non fornisce la direzione in cui punta lo spin descritto da n^μ : per conoscerla occorre valutare la parte spaziale del quadrivettore ottenuto da q^μ attraverso il boost $\Lambda^{-1}(p)$ che manda nel riferimento di quiete ovvero che trasforma il quadrimpulso p^μ in $(m, 0, 0, 0)$.

Prima di passare ad altro argomento, vogliamo ribadire ancora una volta che queste conclusioni non sono rigorose e costituiscono una sorta di forzatura che ha solo il senso di darci una guida circa quello che possiamo attenderci riguardo alla polarizzazione delle particelle di massa nulla. Infatti, finché $m \neq 0$, i quadrivettori (2.587) sono in grado di descrivere polarizzazioni in qualsiasi direzione dello spazio (e non solo quelle longitudinali...), per qualunque valore finito di γ !

Un proiettore di spin molto interessante è certamente quello che proietta su stati di elicità definita, ovvero nella direzione di moto della particella. Per quanto abbiamo detto, evidentemente, fissato comunque il quadrimpulso della particella $p^\mu = (E, \vec{p})$, occorrerà cercare un quadrivettore space-like di modulo unitario n^μ che, nel riferimento del CM , punti proprio nella direzione di \vec{p} . Cerchiamolo del tipo (2.561), avendo posto

$$k^\mu \equiv (p, \vec{p}) \quad (2.591)$$

Per quanto detto sopra, dalla (2.566), segue che la soluzione del tipo cercato sarà

$$n^\mu = \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{(pk)} k^\mu - p^\mu \right) \quad (2.592)$$

Vediamo se fa al caso nostro !
Intanto osserviamo che

$$(kp) = Ep - p^2 = p(E - p) = p(E - p) \frac{E + p}{E + p} = \frac{m^2 p}{E + p} \quad (2.593)$$

e quindi risulta¹¹⁴

$$n^\mu = \frac{1}{m} \left(\frac{E + p}{p} k^\mu - p^\mu \right) = \frac{1}{m} (p, E \vec{n}) \quad (2.595)$$

dove

$$\vec{n} \equiv \frac{\vec{p}}{p} \quad (2.596)$$

¹¹⁴Infatti si ha

$$\begin{aligned} n^\mu &= \frac{1}{m} \left(\frac{E + p}{p} k^\mu - p^\mu \right) = \frac{1}{m} \frac{E + p}{p} (p, \vec{p}) - \frac{1}{m} p^\mu = \\ &= \frac{1}{m} (E + p, (E + p) \vec{n}) - \frac{1}{m} (E, \vec{p}) = \frac{1}{m} (p, E \vec{n}) \end{aligned} \quad (2.594)$$

Applichiamogli ora il boost di Lorentz (2.568) per vedere che forma esso assume nel riferimento del CM in modo da determinare la direzione in cui agisce il proiettore di spin: si ha¹¹⁵

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m} p^\mu &\rightarrow (-1, 0, 0, 0) \\ \frac{E+p}{mp} k^\mu &\rightarrow \frac{E+p}{mp} \frac{E-p}{m} k^\mu = \frac{1}{p} (p, \vec{p}) \equiv (1, \vec{n}) \quad \text{dove} \quad \vec{n} \equiv \frac{\vec{p}}{p} \end{aligned}$$

per cui

$$\Lambda_p^{-1} n^\mu = (0, \vec{n}) \quad (2.599)$$

e dunque n^μ è proprio il quadrivettore che cercavamo per individuare i proiettori di elicità Σ_\pm .

Ma vediamo adesso come si può esplicitare meglio l'azione di questi proiettori direttamente sugli spinori di Dirac. Osserviamo che

$$k^\mu = p^\mu - (E - p, 0, 0, 0) \quad (2.600)$$

e quindi risulta

$$\begin{aligned} n^\mu &= \frac{1}{m} \left[\frac{E+p}{p} p^\mu - p^\mu \right] - \frac{E+p}{mp} (E-p) (1, 0, 0, 0) = \\ &= \frac{1}{m} \frac{E+p-p}{p} p^\mu - \frac{m^2}{mp} (1, 0, 0, 0) = \frac{E}{mp} p^\mu - \frac{m}{p} (1, \vec{0}) \end{aligned} \quad (2.601)$$

Evidentemente si ha allora che

$$\not{n} \equiv n_\mu \gamma^\mu = \frac{E}{mp} \not{p} - \frac{m}{p} \gamma^0 \quad (2.602)$$

¹¹⁵Si dimostra infatti facilmente che, se k è dato dalla (2.591) e Λ_p^{-1} dalla (2.568), allora risulta

$$\Lambda_p^{-1} k = \frac{E-p}{m} k$$

Infatti, data la (2.600) e vista la prima colonna della (2.568), abbiamo che

$$\Lambda_p^{-1} k = \hat{p} - (E-p) \frac{1}{m} (E, -\vec{p}) = (m-E) \cdot \frac{E-p}{m}, \frac{E-p}{m} \vec{p} \quad (2.597)$$

ma

$$m - \frac{E(E-p)}{m} = \frac{m^2 - E^2 + Ep}{m} = \frac{m^2 - m^2 - p^2 + Ep}{m} = \frac{E-p}{m} p$$

per cui è così dimostrato che effettivamente risulta

$$\Lambda_p^{-1} k = \frac{E-p}{m} (p, \vec{p}) = \frac{E-p}{m} k \quad (2.598)$$

Ne segue quindi che, quando questo operatore viene applicato, per esempio, alla soluzione $u(\vec{p})$ dell'equazione di Dirac, essendo

$$\not{p} u(\vec{p}) = m u(\vec{p}) \quad (2.603)$$

risulta

$$\not{p} u(\vec{p}) = \frac{E}{mp} m u(\vec{p}) - \frac{m}{p} \gamma^0 u(\vec{p}) = \frac{E}{p} u(\vec{p}) - \frac{m}{p} \gamma^0 u(\vec{p}) \quad (2.604)$$

per cui abbiamo

$$\Sigma_{\pm} u(\vec{p}) \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \not{p} u(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \gamma_5 \left(\frac{E}{p} - \frac{m}{p} \gamma^0 \right) \right] u(\vec{p}) \quad (2.605)$$

Come si vede, quindi, nel limite ultrarelativistico in cui $E \rightarrow +\infty$ (e conseguentemente $E/p \rightarrow 1$), i.e. nel limite in cui la massa m diventa trascurabile rispetto all'energia E della particella, si ha che i proiettori Σ_{\pm} , sugli spinori $u(\vec{p})$, diventano¹¹⁶ tale per cui

$$\Sigma_{\pm} u(\vec{p}) \rightarrow \frac{1 \pm \gamma_5}{2} u(\vec{p}) \quad (2.627)$$

¹¹⁶E' istruttivo vedere più da vicino le implicazioni della (2.627). Supponiamo, infatti, di considerare uno stato $u(\hat{p}) = \alpha_s u^{(s)}(\hat{p})$ con $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$, ovvero il generico stato di una particella di Dirac vista nel suo riferimento di quiete. Usando i proiettori χ_{\pm} definiti dalla (2.632), possiamo scomporre lo stato in questione nelle sue componenti chirali, ponendo

$$u(\hat{p}) = \chi_+ u(\hat{p}) + \chi_- u(\hat{p}) \equiv u_+(\hat{p}) + u_-(\hat{p}) \quad (2.606)$$

Data la struttura di γ_5 , i due vettori $u_{\pm}(\hat{p})$ sono tali che

$$u_{\pm}(\hat{p}) = \alpha_s u_{\pm}^{(s)}(\hat{p}) \quad (2.607)$$

dove

$$u_{\pm}^{(s)}(\hat{p}) \equiv \chi_{\pm} u^{(s)}(\hat{p}) = \frac{1}{2} \left[u^{(s)}(\hat{p}) \pm (i\sigma_2)_{rs} v^{(r)}(\hat{p}) \right] \quad (2.608)$$

ed è poi immediato che i vettori $u_{\pm}(\hat{p})$ risultano avere entrambi la stessa norma, essendo

$$\begin{aligned} u_{\pm}^{\dagger}(\hat{p}) \cdot u_{\pm}(\hat{p}) &= u^{\dagger}(\hat{p}) \cdot \chi_{\pm}^{\dagger} \cdot \chi_{\pm} \cdot u(\hat{p}) = u^{\dagger}(\hat{p}) \cdot \chi_{\pm}^2 \cdot u(\hat{p}) = u^{\dagger}(\hat{p}) \cdot \chi_{\pm} \cdot u(\hat{p}) = \\ &= \frac{1}{2} u^{\dagger}(\hat{p}) \cdot u(\hat{p}) = \frac{1}{4m} \end{aligned} \quad (2.609)$$

essendo $u^{\dagger}(\hat{p}) \gamma_5 u(\hat{p}) = 0$.

Immaginiamo ora di applicare ad $u(\hat{p})$ un boost generico Λ_p : sappiamo che lo stato trasformato di quello in esame sarà adesso descritto dallo spinore

$$u^{(s)}(\vec{p}) = S(\Lambda_p) u^{(s)}(\hat{p}) \quad (2.610)$$

Quanto ai proiettori chirali, risulta evidentemente ancora che

$$u(\vec{p}) = \chi_+ u(\vec{p}) + \chi_- u(\vec{p}) \equiv u_+(\vec{p}) + u_-(\vec{p}) \quad (2.611)$$

Per quanto riguarda, invece, l'azione di Σ_{\pm} sugli spinori $v(\vec{p})$, partendo dal fatto

e siccome γ_5 commuta con le $S(\Lambda)$, ne segue che

$$\chi_{\pm} u(\vec{p}) \equiv \chi_{\pm} S(\Lambda_p) u(\hat{p}) = S(\Lambda_p) \chi_{\pm} u(\hat{p}) = S(\Lambda_p) u_{\pm}(\hat{p}) \quad (2.612)$$

e dunque risulta

$$u(\vec{p}) = S(\Lambda_p) u_+(\hat{p}) + S(\Lambda_p) u_-(\hat{p}) \quad (2.613)$$

Ammettiamo ora che lo stato $u(\hat{p})$ rappresenti una particella di Dirac con lo spin allineato nella direzione \vec{n} e che il boost Λ_p avvenga nella stessa direzione della polarizzazione, conferendo quindi alla particella un impulso spaziale $p\vec{n}$. Abbiamo allora che, per qualunque valore dell'energia, risulta comunque che

$$\Sigma_+ u(\vec{p}) = u(\vec{p}) \quad (2.614)$$

dove Σ_+ è appunto, per definizione, il proiettore di elicità nel verso dell'impulso $p\vec{n}$.

Ma abbiamo detto che, per gli spinori di tipo u , quando $E \gg m$, $\Sigma_+ \rightarrow \chi_+$ e dunque, nel limite di alta energia, quanto sopra implica che

$$u(\vec{p}) = \Sigma_+ u(\vec{p}) \rightarrow \chi_+ u(\vec{p}) = u_+(\vec{p}) \quad (2.615)$$

Vista però la (2.611), che ne è di $u_-(\vec{p})$?

Il punto è che la rappresentazione del gruppo di Lorentz $S(\Lambda)$ *non* è unitaria e quindi non conserva la norma dei vettori a cui vengono applicati i suoi operatori. I vettori $u_{\pm}(\hat{p})$ hanno la stessa norma, ma questo non resta vero per i vettori $u_{\pm}(\vec{p})$!

Accade, in particolare, che, nel limite di alta energia, se l'impulso spaziale punta nella direzione dello spin relativo allo stato $u_{\pm}(\hat{p})$, allora il vettore $u_-(\vec{p})$ tende a zero. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} u_-(\vec{p}) &= S(\Lambda_p) u_-(\hat{p}) = S(\Lambda_p) \left[\alpha_s u_-^{(s)}(\hat{p}) \right] = \frac{1}{2} \alpha_s S(\Lambda_p) \left[u^{(s)}(\hat{p}) - (i\sigma_2)_{rs} v^r(\hat{p}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \alpha_s \left[u^{(s)}(\vec{p}) - (i\sigma_2)_{rs} v^r(\vec{p}) \right] \end{aligned} \quad (2.616)$$

Ma essendo u_- , per definizione, autostato di γ_5 per l'autovalore -1 , le sue grandi componenti sono necessariamente uguali ed opposte alle sue piccole componenti: occupiamoci dunque delle prime, che indicheremo, per semplicità, con $w_-(\vec{p})$. Avendo già definito con \vec{n} la direzione dell'impulso spaziale, dalle definizioni (2.469) e (2.472) degli spinori u e v , abbiamo che

$$w_-(\vec{p}) = \frac{1}{2} \alpha_s \left[\sqrt{E+m} w^{(s)} - (i\sigma_2)_{rs} \sqrt{E-m} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \tilde{w}^{(r)} \right] \quad (2.617)$$

ma, come osservato nella (2.490), risulta che $(i\sigma_2)_{rs} \tilde{w}^{(r)} = w^{(s)}$ e dunque

$$w_-(\vec{p}) = \frac{1}{2} \alpha_s \left[\sqrt{E+m} w^{(s)} - \sqrt{E-m} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w^{(s)} \right] \quad (2.618)$$

D'altronde, per ipotesi lo spinore $u(\hat{p})$ descrive uno stato di spin allineato proprio con la direzione \vec{n} , per cui, data la struttura di $u(\hat{p})$ in termini dei vettori bidimensionali $w^{(s)}$, deve essere necessariamente che

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \cdot (\alpha_s w^{(s)}) = \alpha_s w^{(s)} \quad (2.619)$$

che adesso l'equazione di Dirac fornisce

$$\not{p} v(\vec{p}) = -m v(\vec{p}) \quad (2.628)$$

ne risulta che

$$\not{p} v(\vec{p}) = -\frac{E}{mp} m v(\vec{p}) - \frac{m}{p} \gamma^0 v(\vec{p}) = -\frac{E}{p} v(\vec{p}) - \frac{m}{p} \gamma^0 v(\vec{p}) \quad (2.629)$$

e dunque risulta

$$\begin{aligned} w_-(\vec{p}) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{E+m} - \sqrt{E-m} \right] \left(\alpha_s w^{(s)} \right) \approx \frac{1}{2} \left[\sqrt{E} + \sqrt{E} \frac{m}{2E} - \sqrt{E} + \sqrt{E} \frac{m}{2E} \right] \left(\alpha_s w^{(s)} \right) = \\ &= \frac{m}{2E} \sqrt{E} \left(\alpha_s w^{(s)} \right) \end{aligned} \quad (2.620)$$

il quale, evidentemente, tende a zero nel limite in cui $E \rightarrow \infty$.

Per completezza, vediamo adesso che cosa succede, invece, a $u_+(\vec{p})$. Si ha

$$\begin{aligned} u_+(\vec{p}) &= S(\Lambda_p) u_+(\hat{p}) = S(\Lambda_p) \left[\alpha_s u_+^{(s)}(\hat{p}) \right] = \frac{1}{2} \alpha_s S(\Lambda_p) \left[u^{(s)}(\hat{p}) + (i\sigma_2)_{rs} v^r(\hat{p}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \alpha_s \left[u^{(s)}(\vec{p}) + (i\sigma_2)_{rs} v^r(\vec{p}) \right] \end{aligned} \quad (2.621)$$

Stavolta u_+ è autovettore di γ_5 per l'autovalore +1 e dunque le sue grandi componenti coincidono con le piccole: indichiamole con $w_+(\vec{p})$. Risulta

$$w_+(\vec{p}) = \frac{1}{2} \alpha_s \left[\sqrt{E+m} w^{(s)} + (i\sigma_2)_{rs} \sqrt{E-m} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \tilde{w}^{(r)} \right] \quad (2.622)$$

e quindi, ripetendo le stesse considerazioni di cui sopra, possiamo concludere che

$$\begin{aligned} w_+(\vec{p}) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{E+m} + \sqrt{E-m} \right] \left(\alpha_s w^{(s)} \right) \approx \frac{1}{2} \left[\sqrt{E} + \sqrt{E} \frac{m}{2E} + \sqrt{E} - \sqrt{E} \frac{m}{2E} \right] \left(\alpha_s w^{(s)} \right) = \\ &= \sqrt{E} \left(\alpha_s w^{(s)} \right) \end{aligned} \quad (2.623)$$

il cui confronto con la (2.620) mostra in particolare che

$$w_-(\vec{p}) \approx \frac{m}{2E} w_+(\vec{p}) \quad (2.624)$$

ovvero che la componente di elicità *sbagliata* si riduce, ad alta energia, proporzionalmente a $\frac{m}{2E}$. Concludiamo infine l'argomento, occupandoci di $u(\vec{p})$ stesso: dalla definizione risulta che

$$u(\vec{p}) = \alpha_r \left(\frac{\sqrt{E+m}}{\sqrt{E-m}} w^{(r)} \right) \quad (2.625)$$

ovvero, vista la polarizzazione concorde con la direzione dell'impulso, per quanto già osservato

$$u(\vec{p}) = \alpha_r \left(\frac{\sqrt{E+m}}{\sqrt{E-m}} w^{(r)} \right) \approx \sqrt{E} \left(\begin{matrix} \alpha_r w^{(r)} \\ \alpha_r w^{(r)} \end{matrix} \right) + \frac{m}{2\sqrt{E}} \left(\begin{matrix} \alpha_r w^{(r)} \\ -\alpha_r w^{(r)} \end{matrix} \right) \quad (2.626)$$

la quale mostra direttamente, in modo evidente, la separazione di $u(\vec{p})$ nelle due componenti $u_+(\vec{p})$ e $u_-(\vec{p})$, unitamente al fatto che, per $E \gg m$, $\Sigma_+ u(\vec{p}) \rightarrow \chi_+ u(\vec{p})$.

e dunque si ha

$$\Sigma_{\pm} v(\vec{p}) \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \not{p} v(\vec{p}) = \frac{1}{2} \left[1 \mp \gamma_5 \left(\frac{E}{p} + \frac{m}{p} \gamma^0 \right) \right] v(\vec{p}) \quad (2.630)$$

ovvero, nel limite ultrarelativistico in cui $E \gg m$, abbiamo che adesso risulta

$$\Sigma_{\pm} v(\vec{p}) \rightarrow \frac{1 \mp \gamma_5}{2} v(\vec{p}) \quad (2.631)$$

E' opportuno ricordare a questo punto che, indipendentemente dai proiettori di elicità, sono comunque definiti gli operatori¹¹⁷ *scalari* seguenti

$$\chi_{\pm} \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \quad (2.632)$$

¹¹⁷Occorre mettere in evidenza una differenza importante che esiste fra i proiettori Λ_{\pm} e Π_{\pm} con quelli di chiralità χ_{\pm} , definiti dalla (2.632), almeno nel caso di massa non nulla. Evidentemente, essendo infatti

$$[\Lambda_{\pm}, \not{p} \pm m] = 0 = [\Pi_{\pm}, \not{p} \pm m]$$

ne segue che se $\psi(p)$ è soluzione dell'equazione di Dirac per energie positive/negative, allora anche $\Lambda_{\pm} \psi$ e $\Pi_{\pm} \psi$ lo sono (essendo, eventualmente nulle ...).

Questo, se $m \neq 0$, non è vero per χ_{\pm} proprio perché

$$[\chi_{\pm}, \not{p} \pm m] \neq 0$$

Supponiamo infatti, per esempio, che $\psi(p)$ soddisfi l'equazione

$$(\not{p} - m) \psi(p) = 0$$

ovvero sia una soluzione dell'equazione di Dirac per energie positive e dunque uno spinore di tipo u : siccome γ_5 anticommuta con le γ^{μ} , ecco che per $\gamma_5 \psi$ vale piuttosto l'equazione

$$(\not{p} + m) \gamma_5 \psi(p) = 0$$

ovvero, si tratta di uno spinore di tipo v . Evidentemente, se la massa è nulla, l'argomento cade perché in quel caso $\not{p} \pm m \rightarrow \not{p}$, ma nel caso di massa non nulla possiamo concludere, per quanto riguarda gli stati $\psi_{\pm} \equiv \chi_{\pm} \psi$, che essi *non* sono soluzioni dell'hamiltoniana di Dirac.

In altre parole, mentre Λ_{\pm} e Π_{\pm} sono proiettori compatibili con la dinamica libera della particella di Dirac, il proiettore di chiralità non gode di questa proprietà: esso è un proiettore *cinematico*, incompatibile con la dinamica (se la massa della particella è diversa da zero).

Per esempio, se ψ è il campo del neutrino e questo non ha massa nulla, allora non è corretto dire che esso è descritto da $\frac{1-\gamma_5}{2} \psi$ e quindi che lo stato di neutrino è autostato della chiralità per l'autovalore -1 . Ciò che è corretto è che la presenza del proiettore di chiralità nell'espressione della corrente debole e quindi nel vertice dell'interazione favorisce lo stato di neutrino di elicità negativa (dato che, usualmente, la massa del neutrino risulta molto minore della sua energia nel sistema del laboratorio). Detto altrimenti, in un processo del tipo

$$e^{-} + A \rightarrow B + \nu$$

con A e B anch'essi particelle di Dirac massive, il neutrino, nel sistema del CM del processo, avrà prevalentemente elicità negativa, con una piccola contaminazione di elicità positiva dell'ordine di m/E e, in ogni caso, sarà descritto da uno spinore di tipo u !

i quali proiettano su stati di *chiralità*¹¹⁸ definita¹¹⁹: l'operatore χ_- entra direttamente nella definizione della corrente debole carica ed è proprio a causa della sua presenza che le interazioni deboli violano¹²⁰ la parità !

Come abbiamo osservato sopra, il proiettore chirale è scalare per trasformazioni di Lorentz e dunque stati di chiralità definita restano tali anche al cambiare del sistema di riferimento.

Abbiamo invece visto che il proiettore di spin, per selezionare gli stessi stati al cambiare del riferimento, deve essere modificato in modo ben preciso, attraverso la trasformazione di Lorentz (2.560) sul quadrivettore n^μ .

Ma che dire del proiettore di elicità ? Potrebbe sembrare che, poichè i proiettori Σ_\pm sono definiti come degli *opportuni* proiettori di spin, anche questi mutino al cambiare del riferimento nello stesso modo dei primi.

Questo però è falso.

La ragione è che, fissato un sistema di riferimento, Σ_\pm viene definito attraverso \not{n} dato dalla (2.595) e quest'ultima prescrizione *non* coincide con quella che ha condotto alla trasformazione (2.560) nel caso di un proiettore di spin, perché, mentre in questo caso vogliamo mantenere la stessa direzione nel CM , nel caso dell'elicità vogliamo che la direzione nel CM sia allineata con la direzione di moto della particella nel riferimento dato, e quindi, a meno di un boost in questa stessa direzione, in generale avremo leggi di trasformazione differenti.

Come abbiamo osservato, se in un dato sistema di riferimento è

$$p^\mu \equiv (E, p \vec{n}) \quad (2.633)$$

allora ne segue che, in questo riferimento, il quadrivettore di elicità è

$$n^\mu = \frac{1}{m}(p, E \vec{n}) \quad (2.634)$$

Se il quadrimpulso della particella diventa

$$p'^\mu = (E', p' \vec{n}') \quad (2.635)$$

dovremo semplicemente usare

$$n'^\mu = \frac{1}{m}(p', E' \vec{n}') \quad (2.636)$$

¹¹⁸La parola *chiralità* deriva dal greco $\chi\epsilon\iota\rho\ \chi\epsilon\iota\rho\omicron\varsigma$ che significa *mano*. Indica la proprietà di avere un'immagine speculare non sovrapponibile a sé, come avviene, appunto, nel caso di una mano. Come vedremo, per parità, abbiamo infatti che $\chi_+ \longleftrightarrow \chi_-$.

¹¹⁹Solo nel caso in cui $E \gg m$, come abbiamo visto, questi stati possono essere identificati con quelli di *elicità* definita !

¹²⁰Intuitivamente possiamo già rendercene conto fin da ora in quanto, per esempio, nel caso ultrarelativistico, a causa di χ_- verrà selezionato nella dinamica del processo, per la particella, lo stato di elicità -1 e per l'antiparticella quello con l'elicità $+1$. Ed è proprio il fatto che i due stati di elicità per particella e antiparticella non entrino nella dinamica nello stesso modo che è all'origine della violazione della simmetria di parità ...

Il fatto, poi, che la dinamica delle particelle con elicità positiva/negativa sia la stessa delle antiparticelle con elicità negativa/positiva significa che la simmetria CP , invece, è conservata.

E veniamo infine alla quantizzazione del campo di Dirac. Questo avviene, di nuovo, espandendo il campo in termini di operatori di creazione/distruzione di particella/antiparticella ed il modo come ciò avviene è il seguente

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{a^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx}\} \quad (2.637)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{b^{(r)}(\vec{p}) \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx}\} \quad (2.638)$$

dove, al solito¹²¹

- $a^{(r)}(\vec{p})$ annichila la particella di quadrimpulso $(E_p, \vec{p}) = (\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$ e di stato di spin r ;
- $a^{\dagger(r)}(\vec{p})$ crea la particella di quadrimpulso (E_p, \vec{p}) e di stato di spin r ;
- $b^{(r)}(\vec{p})$ annichila l'antiparticella di quadrimpulso (E_p, \vec{p}) e di spin r ;
- $b^{\dagger(r)}(\vec{p})$ crea l'antiparticella di quadrimpulso (E_p, \vec{p}) e di stato di spin r ;

e questi operatori soddisfano le regole di *anticommutazione* (tutte le altre sono nulle ...) seguenti

$$\{a^{(r)}(\vec{p}), a^{\dagger(s)}(\vec{p}')\} = \{b^{(r)}(\vec{p}), b^{\dagger(s)}(\vec{p}')\} = 2 E_p (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.639)$$

mentre, sotto il gruppo di Poincaré, essi si trasformano secondo la legge seguente¹²²

$$U(a, \Lambda) a^{(s)}(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{-ia \cdot \Lambda p} R_{sr} a^{(r)}(\vec{\Lambda p}) \quad (2.651)$$

$$U(a, \Lambda) b^{(s)}(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) = e^{-ia \cdot \Lambda p} R_{sr} b^{(r)}(\vec{\Lambda p}) \quad (2.652)$$

¹²¹Si osservi che, come nel caso del campo scalare e vettoriale, quelle che nel gergo della prima quantizzazione abbiamo chiamato *soluzioni ad energia negativa*, cioè le soluzioni che, nel caso in esame, sono associate agli spinori di tipo v , si riferiscono semplicemente alle antiparticelle !

¹²²Questa legge di trasformazione discende direttamente dalla legge di trasformazione degli spinori u e v sotto il gruppo di Lorentz (2.489) e (2.504)

$$S(\Gamma) u^{(s)}(p) = R(\Gamma, p)_{ks} u^{(k)}(\Gamma p) \quad (2.640)$$

$$S(\Gamma) v^{(s)}(p) = R(\Gamma, p)_{ks}^* v^{(k)}(\Gamma p) \quad (2.641)$$

assunto che vogliamo che, per il campo $\psi(x)$, valga la legge di trasformazione (2.439). Dimostriamo infatti che le leggi di trasformazione (2.651) e (2.652) conducono appunto alla (2.439). Per fare questo, partiamo dalla definizione della decomposizione spettrale del campo, i.e. dalla relazione

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{a^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(p) e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(p) e^{ipx}\} \quad (2.642)$$

dove R è la matrice di $SU(2)$ individuata dalla rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Lambda^{-1}, \Lambda p)$ definita, come si ricorderà, nel modo seguente¹²³

$$\mathcal{R}(\Gamma, q) \equiv \Lambda_{\Gamma q}^{-1} \Gamma \Lambda_q \quad (2.655)$$

ne segue che

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda) \psi(x) U^{-1}(a, \Lambda) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \{ U(a, \Lambda) a^{(r)}(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + \\ &+ U(a, \Lambda) b^{\dagger(r)}(\vec{p}) U^{-1}(a, \Lambda) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx} \} \end{aligned} \quad (2.643)$$

e dunque, imponendo la (2.651) e la (2.652), ne segue che

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda) \psi(x) U^{-1}(a, \Lambda) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \{ e^{-ia \cdot \Lambda p} R_{rs} a^{(s)}(\Lambda p) u^{(r)}(p) e^{-ipx} + \\ &+ e^{ia \cdot \Lambda p} R_{rs}^* b^{\dagger(s)}(\Lambda p) v^{(r)}(p) e^{ipx} \} \end{aligned} \quad (2.644)$$

e ponendo $\Lambda p = q$, essendo $(px) = \Lambda p \cdot \Lambda x = q \cdot \Lambda x$, risulta

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda) \psi(x) U^{-1}(a, \Lambda) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \{ e^{-iaq} R_{rs} a^{(s)}(q) u^{(r)}(\Lambda^{-1} q) e^{-iq \cdot \Lambda x} + \\ &+ e^{iaq} R_{rs}^* b^{\dagger(s)}(q) v^{(r)}(\Lambda^{-1} q) e^{iq \cdot \Lambda x} \} \end{aligned} \quad (2.645)$$

Ma abbiamo visto che, in generale, risulta

$$S(\Gamma) u^{(s)}(p) = R(\Gamma, p)_{ks} u^{(k)}(\Gamma p) \quad (2.646)$$

$$S(\Gamma) v^{(s)}(p) = R(\Gamma, p)_{ks}^* v^{(k)}(\Gamma p) \quad (2.647)$$

dove la matrice R che compare nella (2.646) e (2.647) è la matrice di $SU(2)$ individuata dalla rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Gamma, p)$. Facendo allora $\Gamma = \Lambda^{-1}$, si ha

$$S(\Lambda^{-1}) u^{(s)}(q) = R_{ks} u^{(k)}(\Lambda^{-1} q) \quad (2.648)$$

$$S(\Lambda^{-1}) v^{(s)}(q) = R_{ks}^* v^{(k)}(\Lambda^{-1} q) \quad (2.649)$$

da cui, sostituendo nella (2.645), si ottiene appunto che

$$U(a, \Lambda) \psi(x) U^{-1}(a, \Lambda) = S^{-1}(\Lambda) \psi(a + \Lambda x) \quad (2.650)$$

¹²³Si osservi che se partiamo dal sistema del CM, i.e. se il quadrimpulso di partenza è $\hat{p} \equiv (m, 0, 0, 0)$ mentre $\Gamma = \Lambda_p$, allora la rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Lambda_p, \hat{p})$ coincide semplicemente con l'identità, infatti essendo $\Lambda_{\hat{p}} = I$, $\Lambda_p \hat{p} \equiv p$, $\Lambda_{\Gamma \hat{p}}^{-1} = \Lambda_p^{-1}$ si ha $\Lambda_{\Gamma \hat{p}}^{-1} \Gamma \Lambda_p = \Lambda_{\Gamma \hat{p}}^{-1} \Gamma I \equiv I$ e quindi risulta in particolare che

$$U(a, \Lambda_p) a^{(r)}(\hat{p}) U^{-1}(a, \Lambda_p) = e^{-iap} a^{(r)}(p) \quad (2.653)$$

$$U(a, \Lambda_p) b^{(r)}(\hat{p}) U^{-1}(a, \Lambda_p) = e^{-iap} b^{(r)}(p) \quad (2.654)$$

Veniamo infine alla questione della normalizzazione dei campi ψ e $\bar{\psi}$. Anche in questo caso, evidentemente, abbiamo libertà di normalizzazione, essendo anche l'equazione di Dirac una equazione differenziale lineare e omogenea.

La scelta è fatta, di nuovo, in modo che la funzione d'onda $\Psi_{\vec{q}}^{(s)}(x)$ associata in rappresentazione delle coordinate allo stato di particella libera con impulso \vec{q} e stato di spin s , i.e. $|\vec{q}, s\rangle \equiv a^{\dagger(s)}(\vec{q})|\Omega\rangle$, sia semplicemente¹²⁴

$$\Psi_{\vec{q}}^{(s)}(x) = u^{(s)}(\vec{q}) e^{-iqx} \quad (2.677)$$

La dimostrazione di quanto adesso asserito è del tutto analoga a quella vista nel caso del campo scalare.

Infatti, cominciamo con l'osservare che dalla teoria dell'equazione di Dirac, già sappiamo che la funzione d'onda di una particella con impulso definito \vec{q} e spin s , per la (2.453), è necessariamente del tipo

$$\Psi_{\vec{q}}^{(s)}(x) = K u^{(s)}(\vec{q}) e^{-iqx}$$

La normalizzazione, al solito, si determina osservando che

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}', s' | \vec{q}, s \rangle &= \langle \Omega | a^{(s')}(\vec{q}') a^{\dagger(s)}(\vec{q}) | \Omega \rangle = \\ &= \langle \Omega | \{a^{(s')}(\vec{q}'), a^{\dagger(s)}(\vec{q})\} | \Omega \rangle = \\ &= 2E_p (2\pi)^3 \delta_{ss'} \delta^3(\vec{q} - \vec{q}') \end{aligned} \quad (2.678)$$

D'altronde, il prodotto scalare fra due soluzioni dell'equazione di Dirac, in rappresentazione delle coordinate, è data da

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int d^3x \Psi_1^\dagger(\vec{x}, t) \Psi_2(\vec{x}, t)$$

¹²⁴ Anche in questo caso la funzione d'onda si può determinare attraverso l'uso del campo $\psi(x)$, nel modo seguente

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{q}}^{(s)}(x) &= \langle \Omega | \psi(x) a^{\dagger(s)}(\vec{q}) | \Omega \rangle = \\ &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \langle \Omega | \{a^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx}\} a^{\dagger(s)}(\vec{q}) | \Omega \rangle = \\ &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} \langle \Omega | \{a^{(r)}(\vec{p}), a^{\dagger(s)}(\vec{q})\} | \Omega \rangle = u^{(s)}(\vec{q}) e^{-iqx} \end{aligned} \quad (2.656)$$

La stessa regola vale, pur con qualche precauzione, anche per la funzione d'onda dell'antiparticella.

A questo proposito occorre ricordare che se $\Psi(x)$ è soluzione dell'equazione di Dirac libera, allora anche

$$\Psi_C(x) \equiv \mathcal{C}^{-1} \bar{\Psi}(x)^t \quad \text{con} \quad \mathcal{C} \equiv i\gamma^0 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}^{-1} \quad (2.657)$$

lo è, e Ψ_C è detta *la soluzione coniugata di carica* della Ψ .

per cui risulta

$$\langle \Psi_{q'}^{(s')} | \Psi_q^{(s)} \rangle = \int d^3x \Psi_{q'}^{\dagger(s')}(\vec{x}, t) \Psi_q^{(s)}(\vec{x}, t) =$$

La ragione di questa definizione sta nel fatto che, in presenza di interazione elettromagnetica, usando l'accoppiamento minimale canonico, i.e.

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \Leftrightarrow i\hbar \partial^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \quad (2.658)$$

allora se Ψ è soluzione dell'equazione di Dirac in presenza di un dato campo elettromagnetico A^μ , i.e. ($\hbar = c = 1$)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e A_\mu \gamma^\mu) \Psi - m \Psi = 0 \quad (2.659)$$

ne segue che la Ψ_C definita sopra risolve l'equazione di Dirac nello stesso campo esterno ma per una particella di carica opposta (e stessa massa), i.e. risulta

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e A_\mu \gamma^\mu) \Psi_C - m \Psi_C = 0 \quad (2.660)$$

Infatti, prendendo l'hermitiana coniugata dell'equazione di partenza (ricordiamo che A^μ è reale), abbiamo

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - e A_\mu \gamma^\mu) \Psi - m \Psi = 0 &\Rightarrow \partial_\mu \Psi^\dagger (-i\gamma^{\mu\dagger}) - e A_\mu \Psi^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - m \Psi^\dagger = 0 \\ \Rightarrow -i\partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 - e A_\mu \Psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 - m \Psi^\dagger \gamma^0 &= 0 \\ \Rightarrow -i\partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 - e A_\mu \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 - m \Psi^\dagger \gamma^0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.661)$$

dove abbiamo usato il fatto che $(\gamma^0)^2 = I$.

D'altronde $\Psi^\dagger \gamma^0 = \bar{\Psi}$ e $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$, dunque otteniamo che vale quindi l'equazione

$$-i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu - e A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu - m \bar{\Psi} = 0 \quad (2.662)$$

per cui trasponendo, si ha

$$-i\partial_\mu (\gamma^\mu)^t \bar{\Psi}^t - e A_\mu (\gamma^\mu)^t \bar{\Psi}^t - m \bar{\Psi}^t = 0 \quad (2.663)$$

e se moltiplichiamo a sinistra per la matrice \mathcal{C}^{-1} sopra introdotta, che gode delle proprietà per cui

$$\mathcal{C} (\gamma^\mu)^t = -\gamma^\mu \mathcal{C}; \quad \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C} = \mathcal{C}^t \quad (2.664)$$

ecco che risulta

$$\begin{aligned} -i\partial_\mu \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^t \bar{\Psi}^t - e A_\mu \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^t \bar{\Psi}^t - m \mathcal{C}^{-1} \bar{\Psi}^t &= 0 \\ \Rightarrow i\partial_\mu \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} \bar{\Psi}^t + e A_\mu \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} \bar{\Psi}^t - m \mathcal{C}^{-1} \bar{\Psi}^t &= 0 \end{aligned} \quad (2.665)$$

per cui, ponendo appunto $\mathcal{C}^{-1} \bar{\Psi}^t \equiv \Psi_C$, otteniamo infine l'equazione

$$i\partial_\mu \gamma^\mu \Psi_C + e A_\mu \gamma^\mu \Psi_C - m \Psi_C = 0 \quad (2.666)$$

che prova appunto la (2.660).

Osserviamo ancora che se Ψ è una soluzione ad energia positiva, allora Ψ_C è, evidentemente (data la coniugazione complessa) ad energia negativa e viceversa.

L'associazione degli stati di antiparticella con le soluzioni ad energia negativa procede dunque attraverso l'identificazione degli *stati di antiparticella* con le soluzioni coniugate di carica delle soluzioni ad energia negativa; per cui, se prendiamo la generica soluzione piana ad energia negativa $v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx}$, essa individua uno stato di antiparticella libera avente funzione d'onda

$$\Psi = \mathcal{C}^{-1} \bar{v}^{(s)}(\vec{p})^t e^{-ipx} = -\mathcal{C} \bar{v}^{(s)}(\vec{p})^t e^{-ipx} \quad (2.667)$$

e questa è evidentemente una soluzione ad energia positiva: siccome risulta

$$-\mathcal{C} \bar{v}^{(s)}(\vec{p})^t = \mathcal{C}^{-1} \bar{v}^{(s)}(\vec{p})^t = u^{(s)}(\vec{p}) \quad (2.668)$$

essa descrive lo stato di antiparticella di spin s .

Ritornando adesso, per esempio, alla determinazione della funzione d'onda del positrone libero, essa si determina in maniera analoga a quella dell'elettrone, per il quale abbiamo visto dalla (2.656) che risulta

$$\text{elettrone} : \Psi_{\vec{q}}^{(s)}(x) = \langle \Omega | \psi(x) a^{\dagger(s)}(\vec{q}) | \Omega \rangle = u^{(s)}(\vec{q}) e^{-iqx} \quad (2.669)$$

usando però, al posto del campo ψ , il campo coniugato di carica, ovvero (cfr. eq. (C.140)) il campo $\psi_C = \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t$. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \text{positrone} : \quad \Psi_{\vec{q}}^{(s)}(x) &= \langle \Omega | \psi_C(x) b^{\dagger(s)}(\vec{q}) | \Omega \rangle = \\ &= \langle \Omega | \mathcal{C}^{-1} \sum_r \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \left\{ b^{(r)}(\vec{p}) \bar{v}^{(r)t}(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \bar{u}^{(r)t}(\vec{p}) e^{ipx} \right\} b^{\dagger(s)}(\vec{q}) | \Omega \rangle = \\ &= \mathcal{C}^{-1} \sum_r \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \bar{v}^{(r)t}(\vec{p}) e^{-ipx} \langle \Omega | b^{(r)}(\vec{p}) b^{\dagger(s)}(\vec{q}) | \Omega \rangle = \\ &= \mathcal{C}^{-1} \sum_r \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \bar{v}^{(r)t}(\vec{p}) e^{-ipx} \langle \Omega | \left\{ b^{(r)}(\vec{p}), b^{\dagger(s)}(\vec{q}) \right\} | \Omega \rangle = \\ &= \mathcal{C}^{-1} \bar{v}^{(s)t}(\vec{q}) e^{-iqx} = u^{(s)}(\vec{q}) e^{-iqx} \end{aligned} \quad (2.670)$$

Come si vede, quindi, la funzione d'onda dell'elettrone e del positrone coincidono !
E' ragionevole ?

Certo, visto che si tratta di particelle di Dirac aventi la stessa massa !

Però si potrebbe obiettare che, poiché la corrente elettromagnetica è $J^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, se la funzione d'onda dell'elettrone è la stessa di quella del positrone, allora anche la corrente sarà la stessa nei due casi, invece che avere segno opposto ...

Qui la soluzione dell'apparente paradosso sta nel fatto che, per trattare correttamente la questione, occorre inquadrare il problema nell'ambito della QFT, uscendo quindi dallo schema della prima quantizzazione.

In questo contesto (cfr. eq.(C.91) e seguenti), la densità della corrente elettromagnetica è il prodotto $n - \text{ordinato}$ dell'espressione già riportata, i.e.

$$J^\mu = e : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : \quad (2.671)$$

ovvero

$$J^\mu = \frac{e}{2} [\bar{\psi}, \gamma^\mu \psi] \equiv \frac{e}{2} [\bar{\psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta - (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta \bar{\psi}_\alpha] \quad (2.672)$$

$$\begin{aligned}
&= |K|^2 u^{\dagger(s')}(\vec{q}') u^{(s)}(\vec{q}) e^{iE't} e^{-iEt} \int d^3x e^{i\vec{x}\cdot(\vec{q}-\vec{q}')} = \\
&= (2\pi)^3 |K|^2 \delta^3(\vec{q}-\vec{q}') u^{\dagger(s')}(\vec{q}') u^{(s)}(\vec{q}) = \\
&= (2\pi)^3 |K|^2 \delta^3(\vec{q}-\vec{q}') \delta_{ss'} 2E
\end{aligned} \tag{2.679}$$

ed il confronto con la (2.678) mostra appunto che deve essere di nuovo, per gli stessi argomenti già usati per il campo scalare, $K = 1$.

Osserviamo adesso che, dato lo stato di particella $|\vec{q}, s\rangle \equiv a^{\dagger(s)}(\vec{q})|\Omega\rangle$, rappresentato dunque dalla funzione d'onda $\Psi_q^{(s)}(x) = u^{(s)}(\vec{q}) e^{-iqx}$, la densità di corrente ad esso associata, come sappiamo, è

$$j^\mu(x) = \bar{\Psi}_q^{(s)}(x) \gamma^\mu \Psi_q^{(s)}(x) = \bar{u}^{(s)}(\vec{q}) \gamma^\mu u^{(s)}(\vec{q})$$

Ne segue quindi che la sua componente temporale, la quale fornisce la densità di particelle per unità di volume, data la (2.508), è, come nel caso scalare, di nuovo pari a

$$\rho(x) = j^0(x) = \bar{u}^{(s)}(\vec{q}) \gamma^0 u^{(s)}(\vec{q}) = u^{+(s)}(\vec{q}) u^{(s)}(\vec{q}) = 2E \tag{2.680}$$

Per quanto riguarda, poi, le regole di anticommutazione dei campi ψ e $\bar{\psi}$, queste si possono ottenere a partire dalla decomposizione dei campi (2.637) e

Ricordando che ψ è una matrice colonna mentre $\bar{\psi}$ è una matrice riga, in linguaggio matriciale risulta

$$J^\mu = \frac{e}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi - (\gamma^\mu \psi)^t \bar{\psi}^t] = \frac{e}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \psi^t (\gamma^\mu)^t \bar{\psi}^t] \tag{2.673}$$

e dunque, visto che

$$\psi_C = C^{-1} \bar{\psi}^t \quad \leftrightarrow \quad \bar{\psi}_C = \psi^t C^{-1} \tag{2.674}$$

ne segue che

$$\begin{aligned}
J_C^\mu &= \frac{e}{2} [\bar{\psi}_C \gamma^\mu \psi_C - \psi_C^t (\gamma^\mu)^t \bar{\psi}_C^t] = \frac{e}{2} [\psi^t C^{-1} \gamma^\mu C^{-1} \bar{\psi}^t - (C^{-1} \bar{\psi}^t)^t (\gamma^\mu)^t (\psi^t C^{-1})^t] = \\
&= \frac{e}{2} [\psi^t C^{-1} \gamma^\mu C^{-1} \bar{\psi}^t - \bar{\psi} (C^{-1})^t (\gamma^\mu)^t (C^{-1})^t \psi] = \\
&= \frac{e}{2} [\psi^t (C^{-1} \gamma^\mu C^{-1}) \bar{\psi}^t - \bar{\psi} (C^{-1} \gamma^\mu C^{-1})^t \psi]
\end{aligned} \tag{2.675}$$

D'altronde $(C^{-1} \gamma^\mu C^{-1}) = (\gamma^\mu)^t$ per cui risulta infine che

$$J_C^\mu = \frac{e}{2} [\psi^t (\gamma^\mu) \bar{\psi}^t - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi] = -J^\mu \tag{2.676}$$

che è quanto volevamo appunto dimostrare.

(2.638) in termini di operatori di creazione e distruzione e dalle regole di anti-commutazione (2.639) a cui questi ultimi obbediscono.

A tempi uguali, risulta

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\}_{x^0=y^0} = 0 = \{\psi_\alpha^\dagger(x), \psi_\beta^\dagger(y)\}_{x^0=y^0} \quad (2.681)$$

mentre è

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\}_{x^0=y^0} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.682)$$

Dimostriamo quest'ultima relazione. Si ha

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\}_{x^0=y^0} &= \left\{ \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \sum_r \left[a^{(r)}(\vec{p}) u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v_\alpha^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx} \right], \right. \\ &\quad \left. \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \sum_s \left[b^{(s)}(\vec{q}) v_\beta^{+(s)}(\vec{q}) e^{-iqy} + a^{\dagger(s)}(\vec{q}) u_\beta^{+(s)}(\vec{q}) e^{iqy} \right] \right\} = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[\sum_{r,s} u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) u_\beta^{+(s)}(\vec{q}) e^{-ipx} e^{iqy} \{a^{(r)}(\vec{p}), a^{\dagger(s)}(\vec{q})\} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r,s} v_\alpha^{(r)}(\vec{p}) v_\beta^{+(s)}(\vec{q}) e^{ipx} e^{-iqy} \{b^{\dagger(r)}(\vec{p}), b^{(s)}(\vec{q})\} \right] = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} 2E_q (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\ &\quad \left[\sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) u_\beta^{+(r)}(\vec{q}) e^{-ipx} e^{iqy} + \sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p}) v_\beta^{+(s)}(\vec{q}) e^{ipx} e^{-iqy} \right] \end{aligned} \quad (2.683)$$

Integrando su \vec{q} , otteniamo quindi

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\}_{x^0=y^0} = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[e^{-ip(x-y)} \sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) u_\beta^{+(r)}(\vec{p}) + e^{ip(x-y)} \sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p}) v_\beta^{+(s)}(\vec{p}) \right]$$

ma, per ipotesi, $x^0 = y^0$, quindi risulta

$$p(x-y) = -\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.684)$$

poi, quanto al prodotto fra gli spinori, essendo $\bar{u} \equiv u^+ \gamma^0$, si ha evidentemente che

$$\sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) u_\beta^{+(r)}(\vec{p}) = \sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}_\tau^{(r)}(\vec{p}) \gamma_{\tau\beta}^0 \quad (2.685)$$

ed usando la (2.519) e la (2.525), abbiamo quindi che

$$\sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) u_\beta^{+(r)}(\vec{p}) = 2m (\Lambda_+)_{\alpha\tau} \gamma_{\tau\beta}^0 = [(\not{p} + m) \gamma^0]_{\alpha\beta} \quad (2.686)$$

Analogamente, per la (2.520) e (2.527), si ha

$$\begin{aligned}\sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p}) v_\beta^{+(s)}(\vec{p}) &= \sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p}) \bar{v}_\tau^{(s)}(\vec{p}) \gamma_{\tau\beta}^0 = -2m (\Lambda_-)_{\alpha\tau} \gamma_{\tau\beta}^0 = \\ &= [(\not{p} - m) \gamma^0]_{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (2.687)$$

Sostituendo, si ha quindi

$$\begin{aligned}\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\}_{x^0=y^0} &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} [(\not{p} + m) \gamma^0]_{\alpha\beta} + \\ &+ \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} [(\not{p} - m) \gamma^0]_{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (2.688)$$

D'altronde, il secondo integrale, se poniamo $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, diventa

$$\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} [(E_p \gamma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - m) \gamma^0]_{\alpha\beta} \quad (2.689)$$

da sommare al primo integrale che esplicitamente vale

$$\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} [(E_p \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m) \gamma^0]_{\alpha\beta} \quad (2.690)$$

per cui, in definitiva, essendo $(\gamma^0)^2 = I$, risulta appunto che

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\}_{x^0=y^0} = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} 2E_p \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.691)$$

A tempi non uguali, procedendo in modo del tutto simile a quanto sopra, troviamo che l'unico anticommutatore non nullo vale

$$\begin{aligned}\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= i(m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \Delta(x - y, m) \\ &\equiv -i S_{\alpha\beta}(x - y, m)\end{aligned}\quad (2.692)$$

dove la funzione Δ è già stata definita attraverso la (2.284), i.e.

$$\Delta(x - y; m) \equiv -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{-iq(x-y)} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] \quad (2.693)$$

e si è posto

$$S_{\alpha\beta}(x - y, m) \equiv -(m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \Delta(x - y, m) \quad (2.694)$$

Infatti risulta

$$\begin{aligned}
\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= \left\{ \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \sum_r \left[a^{(r)}(\vec{p}) u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v_\alpha^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx} \right], \right. \\
&\quad \left. \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \sum_s \left[b^{(s)}(\vec{q}) \bar{v}_\beta^{(s)}(\vec{q}) e^{-iqy} + a^{\dagger(s)}(\vec{q}) \bar{u}_\beta^{(s)}(\vec{q}) e^{iqy} \right] \right\} = \\
&= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[\sum_{r,s} u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}_\beta^{(s)}(\vec{q}) e^{-ipx} e^{iqy} \{a^{(r)}(\vec{p}), a^{\dagger(s)}(\vec{q})\} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r,s} v_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{v}_\beta^{(s)}(\vec{q}) e^{ipx} e^{-iqy} \{b^{\dagger(r)}(\vec{p}), b^{(s)}(\vec{q})\} \right] = \\
&= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} 2E_q (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\
&\quad \left[\sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}_\beta^{(r)}(\vec{q}) e^{-ipx} e^{iqy} + \sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p}) \bar{v}_\beta^{(s)}(\vec{q}) e^{ipx} e^{-iqy} \right] \quad (2.695)
\end{aligned}$$

ed integrando su d^3q otteniamo dunque

$$\begin{aligned}
\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[e^{-ip(x-y)} \sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p}) \bar{u}_\beta^{(r)}(\vec{p}) + e^{ip(x-y)} \sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p}) \bar{v}_\beta^{(s)}(\vec{p}) \right] = \\
&= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[e^{-ip(x-y)} (m + \not{p}) - e^{ip(x-y)} (m - \not{p}) \right]_{\alpha\beta} = \\
&= (m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right] \quad (2.696)
\end{aligned}$$

Ma nell'integrale riconosciamo, evidentemente, la funzione $\Delta(z; m)$ di cui alla (2.284), per cui in definitiva si ha

$$\begin{aligned}
\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= i (m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \Delta(x - y; m) \\
&\equiv -i S_{\alpha\beta}(x - y; m) \quad (2.697)
\end{aligned}$$

Questa conclusione mostra allora, per le note proprietà della funzione $\Delta(z; m)$, che l'anticommutatore che stiamo considerando soddisfa la causalità, essendo comunque nullo quando il quadrivettore $z = x - y$ è *space-like*.

Venendo infine all'azione delle simmetrie discrete C , P e T , si dimostra che risulta

$$C a^{(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} b^{(r)}(\vec{p}) \longleftrightarrow C a^{\dagger(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} b^{\dagger(r)}(\vec{p}) \quad (2.698)$$

$$C b^{(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} a^{(r)}(\vec{p}) \longleftrightarrow C b^{\dagger(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \quad (2.699)$$

$$C \psi(x) C^{-1} = e^{-i\eta_c} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t(x) \longleftrightarrow C \bar{\psi}(x) C^{-1} = e^{i\eta_c} \psi^t(x) \mathcal{C}^{-1} \quad (2.700)$$

$$\mathcal{C} = i\gamma^0\gamma^2 \quad (2.701)$$

$$P a^{(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_p} a^{(r)}(-\vec{p}) \longleftrightarrow P a^{\dagger(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_p} a^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \quad (2.702)$$

$$P b^{(r)}(\vec{p}) P^{-1} = -e^{i\eta_p} b^{(r)}(-\vec{p}) \longleftrightarrow P b^{\dagger(r)}(\vec{p}) P^{-1} = -e^{-i\eta_p} b^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \quad (2.703)$$

$$P \psi(x) P^{-1} = e^{-i\eta_p} \gamma^0 \psi(Px) \longleftrightarrow P \bar{\psi}(x) P^{-1} = e^{i\eta_p} \bar{\psi}(Px) \gamma^0 \quad (2.704)$$

$$e^{i\eta_p} = \pm 1 \quad (2.705)$$

$$T a^{(r)}(\vec{p}) T^{-1} = e^{-i\eta_T} f_r a^{(\bar{r})}(-\vec{p}) \longleftrightarrow T a^{\dagger(r)}(\vec{p}) T^{-1} = e^{i\eta_T} f_r a^{\dagger(\bar{r})}(-\vec{p}) \quad (2.706)$$

$$T b^{(r)}(\vec{p}) T^{-1} = e^{i\eta_T} f_r b^{(\bar{r})}(-\vec{p}) \longleftrightarrow T b^{\dagger(r)}(\vec{p}) T^{-1} = e^{-i\eta_T} f_r b^{\dagger(\bar{r})}(-\vec{p}) \quad (2.707)$$

$$T \psi(x) T^{-1} = e^{-i\eta_T} \gamma^1 \gamma^3 \psi(Tx) \longleftrightarrow T \bar{\psi}(x) T^{-1} = e^{i\eta_T} \bar{\psi}(Tx) \gamma^3 \gamma^1 \quad (2.708)$$

e si è posto

$$r = 1 : \quad f_r = +1; \quad \bar{r} \equiv \bar{1} = 2 \quad (2.709)$$

$$r = 2 : \quad f_r = -1; \quad \bar{r} \equiv \bar{2} = 1 \quad (2.710)$$

Evidentemente, siccome T è antiunitario, indipendentemente dalla fase $e^{-i\eta_T}$, risulta comunque $T^2 = -I$.

Da queste leggi di trasformazione discendono in modo più o meno immediato, per esempio, le proprietà di trasformazione sotto C , P e T della corrente elettromagnetica e debole.

Consideriamo, per esempio, la corrente debole carica

$$J_w^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi(x) \quad (2.711)$$

Sotto parità, evidentemente, per quanto detto sopra, si ha

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &\rightarrow P J^\mu(x) P^{-1} = \bar{\psi}(Px) \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma^0 \psi(x) = \\ &= \bar{\psi}(Px) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi(Px) = \\ &= \bar{\psi}(Px) \gamma_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi(Px) \neq J_\mu(Px) \end{aligned} \quad (2.712)$$

la quale mostra come la simmetria P non trasformi la corrente debole carica nel modo che ci aspetteremmo per una corrente: infatti, come sappiamo, P è

violata nelle interazioni deboli e questo accade a causa della presenza in essa del proiettore chirale χ_- che, sotto parità, diventa χ_+ . E' altresì evidente come, invece, la corrente elettromagnetica $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ si trasformi per parità in modo corretto, per cui P è invece conservata nelle interazioni elettromagnetiche.

Veniamo ora all'inversione temporale. Sempre per l'interazione debole carica, risulta che (si ricordi che T è antiunitario e che γ_5 è reale)

$$\begin{aligned}
J^\mu(x) &\rightarrow T J^\mu(x) T^{-1} = T \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \psi(x) T^{-1} = \\
&= T \bar{\psi}(x) T^{-1} T \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} T^{-1} T \psi(x) T^{-1} = \\
&= T \bar{\psi}(x) T^{-1} \gamma^{*\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} T \psi(x) T^{-1} = \\
&= \bar{\psi}(Tx) \gamma^3 \gamma^1 \gamma^{*\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma^1 \gamma^3 \psi(Tx)
\end{aligned} \tag{2.713}$$

ma, come si può vedere direttamente (tutte le matrici γ sono reali, a parte la γ^2 che è immaginaria), risulta

$$\gamma^3 \gamma^1 \gamma^{*\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^3 \gamma^1 \gamma^{*\mu} \gamma^1 \gamma^3 \frac{1-\gamma_5}{2} = \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \tag{2.714}$$

e dunque

$$T J^\mu(x) T^{-1} = \bar{\psi}(Tx) \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \psi(Tx) = J_\mu(Tx) \tag{2.715}$$

che mostra come, invece, T sia rispettata anche nell'interazione debole¹²⁵, oltre che, evidentemente, in quella elettromagnetica.

E veniamo infine alla simmetria di coniugazione di carica.

In questo caso è più opportuno (cfr. Appendice C) usare la forma N-ordinata della corrente, i.e. l'espressione¹²⁶

$$J^\mu(x) = \frac{e}{2} \left[\bar{\psi}(x), \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \psi(x) \right] \tag{2.716}$$

Ripetendo quanto visto in precedenza, è facile concludere che $J^\mu(x)$ non cambia segno sotto C come ci aspetteremmo, bensì accade che

$$J^\mu(x) \rightarrow C J^\mu(x) C^{-1} = -\frac{e}{2} \left[\bar{\psi}(x), \gamma^\mu \frac{1+\gamma_5}{2} \psi(x) \right] \tag{2.717}$$

ovvero, mentre il termine vettoriale cambia segno, quello pseudovettoriale non lo fa: anche C è massimamente violata nelle interazioni deboli, mentre non lo è in quelle elettromagnetiche (corrente vettoriale ...). E' facile poi rendersi conto da quanto precede che il prodotto delle due simmetrie CP sono, invece, conservate, come deve accadere vista la conclusione tratta su T ed il teorema CPT .

¹²⁵Stiamo qui usando un'espressione semplificata della corrente debole, senza mixing ...

¹²⁶Naturalmente anche per P e T , l'espressione giusta è quella N-ordinata, ma in questi casi, poiché la simmetria non altera la posizione relativa dei campi ψ e $\bar{\psi}$, si arriva al risultato corretto anche usando la forma non N-ordinata.

2.2.5 Il decadimento del positronio

Come applicazione di quanto abbiamo visto fin'ora, studiamo adesso i modi di decadimento (annichilazione) del positronio. Questo è un sistema legato fatto da un elettrone ed un positrone. Esso è del tutto analogo ad un atomo di idrogeno, a parte la massa ridotta $\mu = \frac{m_e}{2}$ invece di $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \approx m_e$ e quanto ad essa collegato (Rydberg $\propto \mu$, raggio di Bohr $r \propto \mu^{-1}$...).

Inoltre, siccome elettrone e positrone non hanno fattore di forma ed hanno momenti magnetici uguali in modulo e opposti in segno, a differenza di quanto accade nel caso dell'atomo di idrogeno, nel positronio non c'è effetto Zeeman¹²⁷.

Ma la differenza fondamentale naturalmente è che, essendo esso costituito da un sistema particella/antiparticella, non è stabile, bensì si annichila in fotoni.

Lo stato fondamentale del positronio, analogamente a quanto accade per l'atomo di idrogeno, è lo stato $n = 1, L = 0$ ed il sistema dei due fermioni può trovarsi in uno stato di tripletto di spin ($S = 1$) oppure in uno stato di singoletto ($S = 0$). Nel primo caso si parla di *ortopositronio* (*Ops*), mentre nel secondo caso, si parla di *parapositronio* (*Pps*). Questa distinzione è molto importante in quanto *Ops* e *Pps* hanno vite medie e modi di decadimento (annichilazione) del tutto diversi. Vediamo perché.

Occupiamoci per prima cosa della simmetria di Coniugazione di Carica C la quale, poiché il processo di decadimento (annichilazione) è puramente elettromagnetico, sappiamo essere una simmetria conservata dalla dinamica.

Lo stato di positronio sarà evidentemente descrivibile in termini di operatori di creazione a^\dagger e b^\dagger sia dell'elettrone che del positrone, i.e. avremo

$$|ps\rangle = a_1^\dagger b_2^\dagger |\Omega\rangle \quad (2.718)$$

dove, per semplicità, non abbiamo indicato né le variabili spaziali né quelle di spin, ma le abbiamo indicate globalmente con l'indice "1" per l'elettrone e con l'indice "2" per il positrone.

¹²⁷La ragione dell'assenza dell'effetto Zeeman al primo ordine si può capire facilmente anche ragionando in termini classici. Dato che le masse delle due particelle sono uguali ed esse hanno cariche opposte, il moto orbitale non può mai determinare nessuna corrente, per cui il fattore di Landé g_L è necessariamente nullo e quindi il moto orbitale non può contribuire all'effetto Zeeman. D'altronde, nemmeno gli stati di spin possono farlo, visto che

- se il sistema si trova in stato di singoletto, non esiste nessuna direzione definita dello spin e quindi il valore di aspettazione sullo stato di singoletto del momento magnetico non può che essere nullo;
- se il sistema è in stato di tripletto, allora gli spin delle due particelle sono allineati ma poiché i loro momenti magnetici sono uguali ed opposti, si compensano uno con l'altro.

Per questi motivi, quindi, semplicemente l'effetto Zeeman *non* può manifestarsi nel positronio, a meno di usare campi magnetici estremamente intensi, tali da provocare lo splitting dei livelli al secondo ordine in B.

Sotto l'operatore di coniugazione di carica¹²⁸, si ha (ricordiamo che il vuoto è C -invariante)

$$\begin{aligned} C |ps\rangle &= C a_1^\dagger b_2^\dagger |\Omega\rangle = C a_1^\dagger C^{-1} C b_2^\dagger C^{-1} C |\Omega\rangle = b_1^\dagger a_2^\dagger |\Omega\rangle = \\ &= -a_2^\dagger b_1^\dagger |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (2.719)$$

ovvero, a parte un segno meno che viene dalle regole di anticommutazione degli operatori del campo spinoriale, l'operatore di coniugazione di carica si comporta esattamente come l'operatore di scambio fra le due particelle, e dunque uno stato con L ed S definiti sarà autostato di C per l'autovalore

$$C = -(-1)^L (-1)^{S+1} \equiv (-1)^{L+S} \quad (2.720)$$

Il parapositronio, allora, il quale ha $L = 0$ ed $S = 0$, è *pari* sotto C , i.e.

$$C |Pps\rangle = + |Pps\rangle \quad (2.721)$$

e questo implica, per quanto visto circa l'effetto della coniugazione di carica sul fotone, che

$$(e^+ e^-)_{Pps} \rightarrow 2\gamma, 4\gamma, \dots \quad (2.722)$$

Poiché la sezione d'urto di annichilazione elettrone-positrone in due fotoni si può dimostrare che, a momento trasferito nullo, essa è pari a

$$\begin{aligned} \sigma_{2\gamma} &= \sigma_T = 4\pi r_0^2 = 4\pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 4\pi \left(\frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar c}{mc^2} \right)^2 = \\ &= 4\pi \alpha^2 \chi_C^2 \end{aligned} \quad (2.723)$$

la probabilità di decadimento dello stato di Pps per unità di tempo (all'ordine più basso, ovvero trascurando i decadimenti con un numero pari di fotoni maggiore di due) sarà data da

$$\lambda_{2\gamma} = \sigma_T c |\psi(0)|^2 s^{-1} \quad (2.724)$$

dove $|\psi(0)|^2$ fornisce la densità di probabilità di sovrapposizione dell'elettrone con il positrone che, sullo stato fondamentale $n = 1, L = 0$, vale¹²⁹

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{a^3} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\mu e^2}{\hbar^2} \right)^3 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar} \frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 = \frac{1}{8\pi} \alpha^3 \chi_C^{-3} \quad (2.725)$$

¹²⁸Un eventuale fattore di fase $e^{i\eta_C}$ non è rilevante, trattandosi di un sistema particella/antiparticella, per il quale ci sarebbe comunque compensazione fra quello che moltiplicherebbe a^\dagger e quello, complesso coniugato, che moltiplicherebbe b^\dagger .

¹²⁹Con μ intendiamo qui la massa ridotta del sistema, mentre con m indichiamo la massa dell'elettrone (positrone).

per cui risulta

$$\lambda_{2\gamma} = 4\pi \alpha^2 \chi_C^2 c \frac{1}{8\pi} \alpha^3 \chi_C^{-3} = \frac{c}{2} \alpha^5 \chi_C^{-1} = \frac{1}{2} \alpha^5 \frac{mc^2}{\hbar} \quad (2.726)$$

e quindi, essendo la vita media $\tau_{2\gamma}$ niente altro che l'inverso di $\lambda_{2\gamma}$, abbiamo infine che

$$\tau_{2\gamma} = 2 \alpha^{-5} \frac{\hbar}{mc^2} = 2 \times (137)^5 \frac{6.582 \times 10^{-22}}{0.511} = 1.24 \times 10^{-10} s \quad (2.727)$$

Veniamo adesso allo stato dei due fotoni emessi. Visto che $(e^+ e^-)_{Pps}$ ha evidentemente $J = 0$, possiamo dire senz'altro che, nel sistema dove esso è a riposo, i due fotoni emessi in direzione necessariamente opposta (con la stessa energia, pari alla massa dell'elettrone) dovranno avere la stessa elicità dato che la componente del momento angolare totale in ogni direzione (e dunque anche in quella di volo dei fotoni) deve comunque essere nulla. Questo, però, come abbiamo già visto nel caso del decadimento del π^0 , non basta a definire completamente lo stato, visto che questa prescrizione individua due stati indipendenti, i.e. (prescindendo dalla simmetrizzazione dello stato ...)

$$|\vec{k}, + \rangle | - \vec{k}, + \rangle \quad e \quad |\vec{k}, - \rangle | - \vec{k}, - \rangle \quad (2.728)$$

per cui, a priori, una qualunque loro combinazione lineare soddisferebbe ancora la condizione di conservazione del momento angolare.

In realtà lo stato dei due fotoni è univocamente determinato perchè il Pps ha anche parità definita ed questa simmetria è pure essa conservata dalla dinamica, i.e. dall'interazione elettromagnetica.

Ma qual è la parità del positronio nel suo stato fondamentale ?

Evidentemente risulta

$$P = (-1)^L P_{e^+} P_{e^-} \quad (2.729)$$

dove $P_{e^+} P_{e^-}$ è il prodotto delle parità intrinseche del positrone e dell'elettrone che, per quanto visto, sarà comunque sempre pari a -1 .

Dunque, essendo sul fondamentale $L = 0$, ne segue che la parità sia del parapositronio che dell'ortopositronio è comunque $P = -1$.

Per il parapositronio ci troviamo quindi esattamente nella stessa situazione che nel caso del decadimento del π^0 , avendo lo stato iniziale momento angolare nullo e parità negativa: per quanto visto trattando il decadimento del π^0 , i due fotoni avranno dunque polarizzazioni lineari ortogonali.

Non è un caso che si sia ritrovato questo risultato.

Il π^0 , infatti, è fatto proprio dalla combinazione particella/antiparticella, essendo

$$|\pi^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u} \rangle - |d\bar{d} \rangle) \quad (2.730)$$

Ogni coppia $(q\bar{q})$ nel π^0 ha momento angolare orbitale relativo $L = 0$ e si trova in uno stato di singoletto di spin, i.e. $S = 0$, per cui lo spin del π^0 , cioè il momento angolare complessivo J del sistema, è nullo. La particella risulta pseudoscalare¹³⁰ proprio perché è costituita da coppie quark/antiquark che essendo fermioni, hanno parità intrinseca opposta, ed essi si trovano in uno stato che ha $L = 0$.

Quanto infine all'*Ops*, esso, avendo $S = 1$, pur continuando ad avere parità negativa, è autostato della coniugazione di carica C per l'autovalore -1 . Esso non può decadere in un numero pari di fotoni e quindi, non potendo decadere per ragioni cinematiche in un solo fotone, deve decadere in almeno tre. Questo significa che questo processo di annichilazione avviene ad un ordine perturbativo più alto di quello in due fotoni e dunque dobbiamo aspettarci che

$$\lambda_{3\gamma} \approx \alpha \lambda_{2\gamma} \quad (2.731)$$

Per ragioni di spazio delle fasi, compare poi un fattore extra $\frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{3}\right)^2 (\pi^2 - 9)$ per cui alla fine risulta

$$\begin{aligned} \lambda_{3\gamma} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{3}\right)^2 (\pi^2 - 9) \alpha \frac{1}{2} \alpha^5 \frac{mc^2}{\hbar} \\ \Rightarrow \tau_{3\gamma} &= \tau_{2\gamma} \alpha^{-1} \left(\frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{3}\right)^2 (\pi^2 - 9) \right)^{-1} = 1.38 \times 10^{-7} \text{ s} \quad (2.732) \end{aligned}$$

¹³⁰Sia chiaro che esistono anche mesoni neutri che hanno autovalori diversi da $J^{PC} = 0^{-+}$, ma, generalmente, quelli di massa più bassa hanno $L = S = 0$ e dunque $J = 0$, $P = -1$, ovvero sono dei mesoni pseudoscalari.

3 Scattering e decadimenti

I processi di scattering, insieme a quelli di decadimento (che, comunque, sono molto simili a quelli d'urto quanto a trattazione formale), costituiscono la strada naturale che fornisce accesso alla dinamica delle interazioni fra le particelle elementari.

3.1 La matrice S

L'operatore che descrive completamente il processo d'urto è la matrice S . Nel seguito ne forniremo la definizione e quindi vedremo di inquadrarne bene il significato, anche allo scopo di renderne possibile una valutazione perturbativa; ma per far questo, è bene ripartire dai principi primi della Meccanica Quantistica !

E' noto che se $|\psi, t\rangle$ è il *ket* che rappresenta, nello spazio di Hilbert \mathcal{H} associato al sistema considerato, un certo stato fisico al tempo t , allora esso soddisfa l'equazione

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \quad (3.733)$$

dove H è l'operatore hamiltoniano del sistema che, per ipotesi è autoaggiunto. Quando H non dipende esplicitamente dal tempo (sistemi conservativi) l'equazione precedente si integra facilmente nel modo seguente:

$$|\psi, t\rangle = e^{-iHt} |\psi, 0\rangle \quad (3.734)$$

e l'operatore unitario

$$U(t) = e^{-iHt} \quad (3.735)$$

viene chiamato, con ovvio significato, *operatore di evoluzione temporale*.

Se adesso A è una qualsiasi osservabile del sistema, i.e. un qualsiasi operatore autoaggiunto, allora, se indichiamo con $\bar{A}_\psi(t)$ il valor medio di tale osservabile sullo stato $|\psi, t\rangle$, questo, che è un numero reale, risulta essere pari a

$$\begin{aligned} \bar{A}_\psi(t) &= \langle \psi, t | A | \psi, t \rangle = \langle \psi, 0 | e^{iHt} A e^{-iHt} | \psi, 0 \rangle = \\ &= \langle \psi, 0 | U^{-1}(t) A U(t) | \psi, 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.736)$$

Come si vede, e come, del resto, dovrebbe essere ben noto dalla Meccanica Quantistica elementare, i due diversi punti di vista

- *i)* evolvono solo gli stati secondo la legge $|\psi, t\rangle = e^{-iHt} |\psi, 0\rangle$,
- *ii)* evolvono solo le osservabili del sistema, secondo la legge $A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt}$

sono equivalenti ai fini della valutazione dei valori medi delle osservabili ad un dato istante, peraltro arbitrario.

Come al punto di vista *i)* (Schrödinger Picture SP) corrisponde l'equazione di moto per lo stato (equazione di Schrödinger)

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \Rightarrow |\psi, t\rangle = e^{-iHt} |\psi\rangle \quad (3.737)$$

così al punto di vista *ii)* (Heisenberg Picture HP) corrisponde l'equazione di moto per le osservabili (equazione di Heisenberg)

$$i \frac{\partial}{\partial t} A(t) = [A(t), H] \Rightarrow A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt} \quad (3.738)$$

Sia ora data $U(\alpha)$ una famiglia di operatori unitari, parametrizzata dalla variabile reale α . Tanto nello schema di Heisenberg come in quello di Schrödinger è banale rendersi conto che la seguente trasformazione simultanea su stati e osservabili

$$|\psi\rangle \Rightarrow |\psi, \alpha\rangle = U^{-1}(\alpha) |\psi\rangle \quad (3.739)$$

$$A \Rightarrow A_\alpha = U^{-1}(\alpha) A U(\alpha) \quad (3.740)$$

lascia invarianti tutti i valori di aspettazione, infatti

$$\langle \psi, \alpha | A_\alpha | \psi, \alpha \rangle = \langle \psi | U^{\dagger-1}(\alpha) U^{-1}(\alpha) A U(\alpha) U^{-1}(\alpha) | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (3.741)$$

Se poniamo adesso

$$U(\alpha) \equiv U^{-1}(t) = e^{iHt} \quad (3.742)$$

ecco che questa trasformazione unitaria ci fa passare dallo schema di Heisenberg a quello di Schrödinger, dato infatti che risulta

$$\begin{aligned} |\psi, t\rangle_S &= U(t) |\psi\rangle \equiv U(t) |\psi\rangle_H \\ A_S &= U(t) A_H U^{-1}(t) \end{aligned} \quad (3.743)$$

Ponendo invece

$$U(\alpha) \equiv U(t) = e^{-iHt} \quad (3.744)$$

ovviamente passiamo dallo schema di Schrödinger a quello di Heisenberg ...

Supponiamo adesso che l'hamiltoniana del sistema possa essere scritta come

$$H = H_0 + H' \quad (3.745)$$

dove, convenzionalmente, H_0 rappresenta la parte "libera", i.e. quella che solitamente sappiamo trattare per ciò che riguarda l'evoluzione del sistema (autostati, etc ...) ed H' rappresenta la perturbazione, i.e. un'interazione.

Ammettiamo che sia H_0 come H non dipendano esplicitamente dal tempo e poniamo

$$U_0(t) \equiv e^{-iH_0 t}, \quad U(t) \equiv e^{-iH t} \quad (3.746)$$

Indichiamo con $|\psi, t\rangle_S$ e A_S , rispettivamente, gli stati e le osservabili nella SP e con $|\psi\rangle_H$, $A_H(t)$ i medesimi nella HP.

Accanto a questi due schemi, se ne pone un altro, quello che è denominato in letteratura *rappresentazione di interazione* (Interaction Picture, IP) che, come vedremo, è una specie di via di mezzo fra i due ed è molto comodo per trattare, appunto, il problema legato agli effetti dell'interazione stessa.

Facciamo per questo la seguente trasformazione simultanea su stati e osservabili

$$\begin{aligned} |\psi, t\rangle_S &\rightarrow |\psi, t\rangle_I \equiv U_0^{-1}(t) |\psi, t\rangle_S = e^{iH_0 t} e^{-iH t} |\psi\rangle_H \\ A_S &\rightarrow A_I(t) \equiv U_0^{-1}(t) A_S U_0(t) \end{aligned} \quad (3.747)$$

Per quanto detto prima, evidentemente gli stati $|\psi, t\rangle_I$ e le osservabili $A_I(t)$ sono "buoni" quanto gli stati $|\psi, t\rangle_S$ e le osservabili A_S , oppure gli stati $|\psi\rangle_H$ e le osservabili $A_H(t)$ per ciò che concerne lo studio dell'evoluzione del sistema, cioè per quanto riguarda la valutazione dei valori medi delle osservabili, in funzione del tempo. Questi valori medi¹³¹ saranno ovviamente dati infatti da¹³²

$$\langle \psi, t | A_I(t) | \psi, t \rangle_I \quad (3.748)$$

Determiniamo ora come evolvono gli stati nella IP: si ha

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle &= i \frac{\partial}{\partial t} U_0^{-1}(t) U(t) |\psi\rangle_H = i \frac{\partial}{\partial t} e^{iH_0 t} e^{-iH t} |\psi\rangle_H = \\ &= -H_0 e^{iH_0 t} e^{-iH t} |\psi\rangle_H + e^{iH_0 t} H e^{-iH t} |\psi\rangle_H = \\ &= -H_0 |\psi, t\rangle + e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iH t} |\psi\rangle_H = \\ &= e^{iH_0 t} (H - H_0) e^{-iH_0 t} |\psi, t\rangle \equiv H'_I(t) |\psi, t\rangle_I \end{aligned} \quad (3.749)$$

mentre per le osservabili risulta

$$i \frac{\partial}{\partial t} A_I(t) = i \frac{\partial}{\partial t} U_0(-t) A_S U_0(t) = [A_I(t), H_0] \quad (3.750)$$

In sostanza, quindi, nella IP, mentre gli stati evolvono con l'hamiltoniana $H'_I(t)$, che, ricordiamolo ancora, è definita come

$$H'_I(t) = U_0(-t) H' U_0(t) = U_0(t)^{-1} H' U_0(t) = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} \quad (3.751)$$

¹³¹Nel seguito, per comodità di notazione, ometteremo, quando questo non produrrà possibili confusioni, l'indice I .

¹³²Questo schema, naturalmente, coincide con quello di Heisenberg quando l'interazione è assente ... !

le osservabili evolvono secondo l'hamiltoniana libera H_0 , *esattamente* come accade, in assenza di interazione, nella Heisenberg Picture.

Definiamo adesso l'operatore unitario $U(t, t')$ nel modo seguente

$$U(t, t') |a, t' \rangle_S \equiv |a, t \rangle_S \quad (3.752)$$

Dalla definizione si ottiene immediatamente che

$$U(t, t') U(t') |a \rangle_H = U(t) |a \rangle_H \quad \forall |a \rangle \in \mathcal{H} \quad (3.753)$$

ovvero risulta

$$U(t, t') = U(t) U^{-1}(t') \quad (3.754)$$

per cui è immediato dimostrare che

$$\begin{aligned} U(t, t') U(t', t'') &= U(t, t'') \\ U(t, t')^{-1} &= U(t', t) \\ U(t + \tau, t' + \tau) &= U(t, t') \\ U(t, 0) &= U(t) \\ U(0, t) &= U^{-1}(t) \end{aligned} \quad (3.755)$$

Accanto a questo operatore possiamo definire, in maniera del tutto analoga, l'operatore $U_I(t, t')$, ponendo appunto

$$U_I(t, t') |a, t' \rangle_I \equiv |a, t \rangle_I \quad (3.756)$$

e si ottiene ancora che risulta

$$U_I(t, t') = U_I(t) U_I^{-1}(t') \quad (3.757)$$

come pure che valgono, anche per questo operatore, le proprietà (3.755).

Poichè dalla definizione (3.747) è evidente che risulta

$$U_I(t) \equiv U_0^{-1}(t) U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iH t}$$

ne segue altresì che

$$\begin{aligned} U_I(t, t') &= U_I(t) U_I^{-1}(t') = U_0^{-1}(t) U(t) U^{-1}(t') U_0(t') \\ &= U_0^{-1}(t) U(t, t') U_0(t') \end{aligned} \quad (3.758)$$

E veniamo adesso alla matrice S .

Sia α un set completo di osservabili che commutano, relative al sistema considerato, comprendente l'hamiltoniana imperturbata. Indichiamo con $|\alpha \rangle$ la base da esso definita, vista nello schema di Heisenberg relativamente al caso imperturbato (hamiltoniana H_0).

Supponiamo adesso che uno stato $|\alpha\rangle$ si sia evoluto liberamente fino al tempo $-t$ e quindi, fra $-t$ e t' , si sia evoluto secondo l'hamiltoniana completa (perturbata dall'interazione H').

Ci chiediamo qual è, al tempo t' , l'ampiezza relativa alla transizione dallo stato così ottenuto ad un certo stato $|\beta\rangle$, causata dall'interazione stessa.

In altre parole, ci facciamo la seguente domanda: assumendo di considerare il sistema come libero sia prima di $-t$ che dopo t' , lo stato che si è ottenuto dopo t' a partire dallo stato $|\alpha\rangle$ al tempo $-t$, come è connesso con gli stati che risulterebbero da un'evoluzione libera del sistema, regolata solo da H_0 ?

Per quanto concerne l'ampiezza di transizione di cui sopra, evidentemente avremo

$$A_{\beta\alpha}(t', -t) = {}_S \langle \beta, t', lib | U(t', -t) | \alpha, -t, lib \rangle_S \quad (3.759)$$

dove $|\alpha, -t, lib\rangle_S$ è lo stato $|\alpha\rangle$ che si è evoluto liberamente fino al tempo $-t$ e, analogamente $|\beta, t', lib\rangle_S$ è lo stato $|\beta\rangle$ che si è evoluto liberamente fino al tempo t' . Poichè, in generale, risulta

$$|\alpha, -t, lib\rangle_S = U_0(-t) |\alpha\rangle_H \quad (3.760)$$

abbiamo evidentemente che

$$A_{\beta\alpha}(t', -t) = {}_H \langle \beta | U_0^{-1}(t') U(t', -t) U_0(-t) | \alpha \rangle_H \quad (3.761)$$

ovvero, per la (3.758),

$$A_{\beta\alpha}(t', -t) = \langle \beta | U(t', -t)_I | \alpha \rangle \quad (3.762)$$

Passando al limite la (3.762) per t e t' che vanno a $+\infty$ otteniamo proprio, per la sua stessa definizione, l'elemento di matrice S fra i due stati considerati, i.e.

$$S_{\beta\alpha} \equiv \langle \beta | S | \alpha \rangle = \lim_{t, t' \rightarrow +\infty} A_{\beta\alpha}(t', -t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \beta | U_I(t, -t) | \alpha \rangle \quad (3.763)$$

ovvero

$$S = \lim_{t \rightarrow +\infty} U_I(t, -t) = U_I(\infty, -\infty) \quad (3.764)$$

La matrice S , evidentemente unitaria vista la definizione di cui sopra, viene così legata all'operatore di evoluzione temporale in rappresentazione di interazione. Essa, per come l'abbiamo definita, descrive quindi l'azione determinata dalla presenza dell'interazione H' su un set completo di autostati dell'hamiltoniana libera, definiti in rappresentazione di Heisenberg.

Chiaramente, per conoscere effettivamente gli elementi di matrice $S_{\beta\alpha}$, occorrerà in qualche modo riuscire poi ad esplicitare l'operatore $U_I(t', -t)$ e quindi passare al limite. D'altronde, per la (3.757), risulta

$$U_I(t', -t) = U_I(t') U_I^{-1}(-t)$$

dove, per la (3.747), è¹³³

$$U_I(t) = U_0^{-1}(t) U(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}$$

Ne segue quindi che

$$\frac{dU_I(t', -t)}{dt'} = \left[\frac{dU_I(t')}{dt'} \right] U_I^{-1}(-t) \quad (3.765)$$

Ma, evidentemente l'operatore $U_I(t)$ soddisfa la seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned} i \frac{dU_I}{dt} &= -H_0 e^{iH_0 t} e^{-iHt} + e^{iH_0 t} H e^{-iHt} = \\ &= -e^{iH_0 t} H_0 e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} + e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} \\ &= e^{iH_0 t} [H - H_0] e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iHt} = H'_I(t) U_I(t) \\ &\Rightarrow \frac{dU_I}{dt} = -i H'_I(t) U_I(t) \end{aligned} \quad (3.766)$$

Quindi, sostituendo nella (3.765), si ha

$$\frac{dU_I(t', -t)}{dt'} = -i H'_I(t') U_I(t') U_I^{-1}(-t) \equiv -i H'_I(t') U_I(t', -t) \quad (3.767)$$

D'altronde, evidentemente, $U_I(t', t') = I$ e con questa condizione al contorno, si dimostra che l'equazione (3.767) può essere formalmente integrata in serie nel modo seguente:

$$U_I(t', -t) = I + (-i) \int_{-t}^{t'} H'_I(\tau) d\tau + (-i)^2 \int_{-t}^{t'} H'_I(\tau) d\tau \int_{-t}^{\tau} H'_I(\tau') d\tau' + \dots$$

per cui, data la (3.764), risulta infine

$$\begin{aligned} S &= I + (-i) \int_{-\infty}^{\infty} H'_I(\tau) d\tau + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} H'_I(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\tau} H'_I(\tau') d\tau' + \dots \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1, \dots, d\tau_n \mathcal{T} (H'_I(\tau_1) \dots H'_I(\tau_n)) = \\ &\equiv \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H'_I(t) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.768)$$

dove $\mathcal{T} (H'_I(\tau_1) \dots H'_I(\tau_n))$ è il *prodotto cronologico (time-ordered)* degli operatori in parentesi, introdotto da Dyson, che coincide con il prodotto degli stessi operatori, con il tempo che cresce andando da destra verso sinistra.

¹³³La seconda uguaglianza è valida solo se, come abbiamo sempre assunto fin'ora, sia H_0 che H , e quindi H' , non dipendono esplicitamente dal tempo.

3.2 Proprietà di S sotto CPT

Consideriamo un sistema inizialmente libero, retto dall'hamiltoniana H_0 , per il quale venga accesa l'interazione descritta dall'hamiltoniana H'

In QFT, sotto ipotesi molto generali, come la località e l'invarianza sotto il gruppo di Lorentz, si dimostra che il sistema possiede certamente la simmetria¹³⁴ $CPT \equiv \Theta$: assumiamo dunque che l'operatore Θ commuti sia con l'hamiltoniana imperturbata H_0 che con quella di interazione H' .

La matrice S che descrive, in rappresentazione di interazione, le transizioni fra gli stati imperturbati, come abbiamo visto prima, è data da

$$S = \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H'_I(t) \right) \right) \quad (3.769)$$

dove $H'_I(t)$ è l'hamiltoniana di interazione in rappresentazione di interazione, i.e.

$$H'_I(t) = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} \quad (3.770)$$

Osserviamo per prima cosa che l'operatore Θ , per via del suo carattere antiunitario legato a T , *non* commuta con $H'_I(t)$. Abbiamo, infatti, intanto che

$$\begin{aligned} \Theta e^{iH_0 t} \Theta^{-1} &= \Theta \left[I + \frac{(iH_0 t)}{1!} + \frac{(iH_0 t)^2}{2!} + \dots \right] \Theta^{-1} = \\ &= I + \frac{(-iH_0 t)}{1!} + \frac{(-iH_0 t)^2}{2!} + \dots = e^{-iH_0 t} \end{aligned} \quad (3.771)$$

dove si è usato il fatto che Θ commuta con H_0 . Ne segue allora che, poichè per ipotesi Θ commuta anche con H' , risulta

$$\begin{aligned} \Theta H'_I(t) \Theta^{-1} &= \Theta e^{iH_0 t} \Theta^{-1} \Theta H' \Theta^{-1} \Theta e^{-iH_0 t} \Theta^{-1} = \\ &= e^{-iH_0 t} H' e^{iH_0 t} = H'_I(-t) \end{aligned} \quad (3.772)$$

Torniamo adesso alla matrice S .

Vogliamo stabilire l'effetto che ha la trasformazione Θ su di essa.

Per fare questo, immaginiamo per prima cosa di ottenere, al solito, la matrice S come limite per $\tau \rightarrow \infty$ di $S(-\tau, \tau)$, dove

$$S(-\tau, \tau) \equiv U_I(\tau, -\tau) = \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{-\tau}^{+\tau} dt H'_I(t) \right) \right) \quad (3.773)$$

essendo l'operatore $S(-\tau, \tau) \equiv U_I(\tau, -\tau)$ niente altro che l'operatore di evoluzione temporale, scritto in rappresentazione di interazione, fra $-\tau$ e $+\tau$.

Dunque, se vogliamo conoscere questo operatore fra $-\tau$ e $\tau + \delta$, i.e. l'operatore

¹³⁴Quanto concluderemo adesso per Θ vale anche per l'inversione temporale T , se essa è una simmetria conservata del sistema, poichè, come Θ , essa è antiunitaria, ed è proprio questo, come vedremo, l'aspetto cruciale che ci consente di giungere al risultato.

$S(-\tau, \tau + \delta)$, questo si otterrà applicando al vettore di stato prima l'operatore $S(-\tau, \tau)$ e quindi l'operatore $S(\tau, \tau + \delta)$, i.e. risulterà

$$S(-\tau, \tau + \delta) = S(\tau, \tau + \delta) S(-\tau, \tau) \quad (3.774)$$

Evidentemente, poi, vista la sua definizione, nel limite in cui $\delta \rightarrow 0$, l'operatore $S(\tau, \tau + \delta)$ potrà essere scritto anche come (al primo ordine in δ)

$$I - i H_I'(\tau) \delta \approx S(\tau, \tau + \delta) \approx I - i H_I'(\tau + \delta) \delta \quad (3.775)$$

Dalla (3.774) segue evidentemente che, fissato comunque un intero N e posto

$$\delta = \tau/N \quad (3.776)$$

abbiamo

$$S(-\tau, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} [S(\tau - \delta, \tau) S(\tau - 2\delta, \tau - \delta) \dots S(-\tau, -\tau + \delta)] \quad (3.777)$$

il quale, per la (3.775), nel limite in cui $N \rightarrow \infty$, a sua volta diviene

$$\begin{aligned} S(-\tau, \tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (I - i H_I'(\tau_1) \delta) (I - i H_I'(\tau_2) \delta) \dots (I - i H_I'(\tau_{2N}) \delta) \equiv \\ &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} S(N, \tau) \end{aligned} \quad (3.778)$$

dove il prodotto di cui sopra (il quale, nella forma in cui i vari fattori sono linearizzati al primo ordine, definisce appunto la quantità $S(N, \tau)$), è fatto da $2N$ fattori ed abbiamo posto, per comodità

$$\tau_n = \tau - n \delta \equiv \tau - n\tau/N; \quad n = 1, \dots, 2N \quad (3.779)$$

Risulta allora che

$$\begin{aligned} \Theta S \Theta^{-1} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Theta \left(\lim_{N \rightarrow \infty} S(N, \tau) \right) \Theta^{-1} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \Theta [I - i H_I'(\tau_1) \delta] \Theta^{-1} \Theta [I - i H_I'(\tau_2) \delta] \Theta^{-1} \dots \right. \\ &\quad \left. \Theta [I - i H_I'(\tau_{2N}) \delta] \Theta^{-1} \right\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} [I + i H_I'(-\tau_1) \delta] [I + i H_I'(-\tau_2) \delta] \dots \right. \\ &\quad \left. [I + i H_I'(-\tau_{2N}) \delta] \right\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} [I + i H_I'(-\tau) \delta] [I + i H_I'(-\tau + \delta) \delta] \dots \right. \\ &\quad \left. [I + i H_I'(\tau - \delta) \delta] \right\} \end{aligned} \quad (3.780)$$

Ma, essendo δ reale ed H_I' hermitiana, risulta

$$I + i H_I'(t) \delta = \left(I - i H_I'(t) \delta \right)^\dagger \quad (3.781)$$

per cui l'espressione di sopra diviene

$$\begin{aligned}\Theta S \Theta^{-1} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} [I - i H_I'(\tau - \delta) \delta] \dots [I - i H_I'(-\tau) \delta] \right\}^\dagger \equiv \\ &\equiv S^\dagger = S^{-1}\end{aligned}\quad (3.782)$$

Dunque possiamo concludere che, essendo Θ una simmetria antiunitaria conservata, la matrice S , sotto Θ , è tale per cui

$$\Theta S \Theta^{-1} = S^\dagger \quad (3.783)$$

Da questa conclusione segue allora che, dati comunque due stati imperturbati $|A\rangle$ e $|B\rangle$, poiché l'ampiezza di transizione fra uno e l'altro risulta data da

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{B \rightarrow A} \equiv \langle A | S | B \rangle &\equiv \langle A | S B \rangle = \langle \Theta^{-1} \Theta A | \Theta^{-1} \Theta S \Theta^{-1} \Theta B \rangle = \\ &= \langle \Theta^{-1} \Theta A | \Theta^{-1} S^\dagger \Theta B \rangle\end{aligned}\quad (3.784)$$

e poiché Θ^{-1} è antiunitario, si ha infine che

$$\begin{aligned}\langle A | S | B \rangle &= \langle \Theta^{-1} \Theta A | \Theta^{-1} S^\dagger \Theta B \rangle = \langle \Theta A | S^\dagger \Theta B \rangle^* = \\ &= \langle S^\dagger \Theta B | \Theta A \rangle\end{aligned}\quad (3.785)$$

D'altronde S è lineare e quindi

$$\langle S^\dagger \phi | \psi \rangle = \langle \phi | S \psi \rangle \quad (3.786)$$

per cui, in definitiva, in termini di ampiezze di transizione, abbiamo che

$$\mathcal{A}_{B \rightarrow A} = \langle A | S | B \rangle = \langle \Theta B | S \Theta A \rangle \equiv \langle \Theta B | S | \Theta A \rangle \mathcal{A}_{\Theta A \rightarrow \Theta B} \quad (3.787)$$

ovvero, se H_I ed H_0 sono Θ -invarianti, allora l'ampiezza di transizione indotta dalla interazione H_I dallo stato $|B\rangle$ allo stato $|A\rangle$ è uguale a quella che la stessa interazione induce dallo stato $\Theta|A\rangle$ allo stato $\Theta|B\rangle$.

Per esempio, se consideriamo un processo di scattering come il seguente

$$a(\vec{p}, s_a) + b(\vec{q}, s_b) \rightarrow c(\vec{P}, s_c) + d(\vec{Q}, s_d) \quad (3.788)$$

allora, per via della simmetria $CPT \equiv \Theta$, ne segue che

$$\begin{aligned}&| \langle c(\vec{P}, s_c), d(\vec{Q}, s_d) | S | a(\vec{p}, s_a), b(\vec{q}, s_b) \rangle | = \\ &= | \langle \bar{a}(\vec{p}, -s_a), \bar{b}(\vec{q}, -s_b) | S | \bar{c}(\vec{P}, -s_c), \bar{d}(\vec{Q}, -s_d) \rangle | \end{aligned}\quad (3.789)$$

visto che, dalle relative definizioni segue che la simmetria $CPT \equiv \Theta$ trasforma lo stato di particella in quello di antiparticella, non cambia l'autovalore dell'impulso ed inverte il segno dell'autovalore della componente di spin (la presenza del modulo è per ovviare alla presenza di possibili fattori di fase differenti nelle due ampiezze ...).

3.3 Lo scattering in QFT

Abbiamo visto che, nell'ipotesi in cui un sistema fisico sia retto da un'hamiltoniana $H = H_0 + H'$, dove H_0 è l'hamiltoniana del sistema imperturbato ed H' è l'hamiltoniana di interazione, allora, se $|i\rangle$ ed $|f\rangle$ rappresentano nella HP due stati del sistema, autostati¹³⁵ dell'hamiltoniana H_0 per lo stesso autovalore E , l'ampiezza di transizione da $|i\rangle$ ad $|f\rangle$ indotta dalla perturbazione H' è data da

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle \equiv \langle f|U_I(\infty, -\infty)|i\rangle \quad (3.790)$$

dove la forma esplicita della matrice S è data dalla espressione (3.768).

Questo risultato è stato dedotto, almeno implicitamente, nello schema della prima quantizzazione, ma esso continua a valere anche quando il processo di interazione è più complesso che, per esempio quello di un semplice scattering elastico da potenziale, e addirittura, nell'interazione, possono prodursi nuove particelle ...

Per descrivere questo tipo di processi, in cui il numero delle particelle non necessariamente si conserva, occorre però far uso della Teoria dei Campi (QFT). In questo schema, adopereremo come spazio di Hilbert degli stati asintotici del sistema, lo spazio di Fock di particella libera che, per definizione, ha per base i vettori seguenti:

$$\begin{array}{ll} |\Omega\rangle & \text{vuoto} \\ a^\dagger(\vec{p})|\Omega\rangle & \text{una particella} \\ a^\dagger(p)a^\dagger(\vec{q})|\Omega\rangle & \text{due particelle} \\ \dots & \end{array}$$

Finchè i campi restano liberi, non c'è molto di più da dire: questi stati sono stazionari, per cui, fra di loro non è permessa alcuna transizione.

Ma supponiamo ora che sia presente una interazione H' .

In questo caso, partendo da uno stato dei precedenti, esso non rimarrà più necessariamente uguale a se stesso poiché l'interazione potrà consentire transizioni fra stati diversi. Nel caso in cui l'energia totale del sistema sia positiva, queste transizioni sono niente altro che quelle legate ai processi che usualmente chiamiamo *di decadimento* se lo stato iniziale è fatto da una sola particella e *di scattering* se, invece, è fatto da due¹³⁶.

¹³⁵Come abbiamo già detto, gli stati $|i\rangle$ e $|f\rangle$ sono chiamati *stati asintotici* e, come rappresentativi del sistema completo, vanno pensati in rappresentazione di interazione, i.e. in rappresentazione di Heisenberg riguardo ad H_0 .

¹³⁶Si possono prevedere anche casi più complicati, ma noi ci limiteremo a trattare questi due soli casi ...

Per analizzare questi processi, come abbiamo già detto, useremo stati stazionari¹³⁷ dell'hamiltoniana libera e calcoleremo l'ampiezza di transizione indotta fra di loro a causa dell'interazione. Considereremo quindi più precisamente

- uno stato $|\chi_a\rangle$, che chiameremo *iniziale*, comprendente vari frammenti (uno, se si tratta di decadimento, due se è un processo di scattering) in un canale¹³⁸ definito, che abbiamo indicato con la lettera a ;
- uno stato *finale* $|\chi_b\rangle$ comprendente, in generale, altri frammenti in un altro canale¹³⁹, che indicheremo con la lettera b .

Per $t \rightarrow -\infty$ lo stato $|\chi_a\rangle$ sarà fatto dalle particelle non interagenti del canale a : per esempio, nel caso di uno scattering fra due particelle "1" e "2" aventi, rispettivamente, impulso \vec{p} e \vec{q} , avremo evidentemente

$$|\chi_a\rangle = a_1^\dagger(\vec{p}) a_2^\dagger(\vec{q})|\Omega\rangle \quad (3.791)$$

dove gli operatori $a_{1,2}^\dagger$ sono gli operatori di creazione dei frammenti *liberi* presenti nel canale a di ingresso (per semplicità di notazione non stiamo considerando qui la presenza dello spin).

Per $t \rightarrow +\infty$, analogamente, se assumiamo di essere finiti nel canale b fatto ancora da due particelle "3" e "4", non necessariamente coincidenti con quelle di partenza e aventi, rispettivamente, impulso \vec{P} e \vec{Q} , sarà

$$|\chi_b\rangle = a_3^\dagger(\vec{P}) a_4^\dagger(\vec{Q})|\Omega\rangle \quad (3.792)$$

dove gli operatori $a_{3,4}^\dagger$ si riferiscono ora ai frammenti nel canale b di uscita.

Evidentemente lo scopo della teoria sarà proprio quello di calcolare l'ampiezza di transizione fra tali stati determinata dall'interazione, i.e. la quantità

$$S_{ba} \equiv \langle \chi_b | S | \chi_a \rangle \quad (3.793)$$

Per la valutazione di S_{ba} , rifacciamoci ancora al fatto che, almeno nello schema di prima quantizzazione, è stato dimostrato che, lavorando in rappresentazione di interazione, risulta

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_I(t) \right) \right) \equiv \\ &\equiv \mathcal{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \dots dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) \right) \end{aligned} \quad (3.794)$$

¹³⁷Non avrebbe senso, ovviamente, trattare con stati stazionari dell'hamiltoniana completa, dato che, come è ovvio, fra questi, per definizione di stazionarietà, non potrebbero avvenire mai transizioni !

¹³⁸Un canale è definito come uno specifico insieme di frammenti separati, ognuno in uno stato quantico ben definito, non interagenti fra di loro quando la loro distanza di separazione è molto grande (con la sola possibile eccezione dell'interazione coulombiana che, essendo a lungo range, non è lecito considerare mai *spenta*...).

¹³⁹Se indichiamo dunque con H_a l'hamiltoniana libera di cui è autostato lo stato iniziale, e con H_b l'hamiltoniana libera di cui è autostato lo stato finale, in generale sarà $H_a \neq H_b$. L'uguaglianza equivale, evidentemente, a dire che lo scattering è elastico !

dove $H'_I(t)$ è appunto l'hamiltoniana di interazione nella *Interaction Picture*

$$H'_I(t) \equiv e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} \quad (3.795)$$

ed il simbolo \mathcal{T} indica, come abbiamo già detto, l'operatore di ordinamento cronologico, definito in modo tale che

$$\mathcal{T} \left(H'_I(t_1) \dots H'_I(t_n) \right) \equiv H'_I(t_{i_1}) \dots H'_I(t_{i_n}) \quad \text{con} \quad t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \dots t_{i_n} \quad (3.796)$$

In MQ di prima quantizzazione, avevamo identificato in generale l'hamiltoniana di perturbazione H' con il potenziale di scattering V .

Che accade in QFT ?

In questo caso H' è espressa usando gli stessi campi che definiscono la teoria. Abbiamo visto che $H'_I(t)$ evolve nel tempo esattamente come in rappresentazione di Heisenberg libera, ovvero $H'_I(t)$ deve semplicemente essere scritta usando i campi liberi, cioè dipendenti dal tempo come se l'interazione non fosse presente !

Dunque

$$H'_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}'(t, x) \quad (3.797)$$

dove $\mathcal{H}'(x)$ è appunto la densità di energia di interazione

$$\mathcal{H}'(x) = \mathcal{H}_{tot}(x) - \mathcal{H}_0(x) \quad (3.798)$$

e $\mathcal{H}_{tot}(x)$ e $\mathcal{H}_0(x)$ sono, rispettivamente, l'operatore di densità hamiltoniana totale e quello relativo all'evoluzione libera.

Quanto alla matrice di scattering S , risulta quindi che

$$S \equiv \mathcal{T} \left(\exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}'(x) \right) \right) \quad (3.799)$$

dove adesso¹⁴⁰

$$\mathcal{T} \left(\mathcal{H}'(x_1) \dots \mathcal{H}'(x_n) \right) \equiv \mathcal{H}'(x_{i_1}) \dots \mathcal{H}'(x_{i_n}) \quad \text{con} \quad x_{i_1}^0 \geq x_{i_2}^0 \geq \dots x_{i_n}^0 \quad (3.800)$$

¹⁴⁰L'ambiguità che consegue nella (3.800) quando due coordinate temporali sono uguali è irrilevante poiché

$$[\mathcal{H}'(x), \mathcal{H}'(y)] = 0 \quad \text{se} \quad (x - y)^2 < 0$$

e questo, a sua volta, è conseguenza della microcausalità, i.e. delle relazioni di (anti)commutazione dei campi (fermionici) bosonici e del fatto che il numero di campi fermionici che entrano nella lagrangiana di interazione e quindi nella \mathcal{H}' deve essere pari, se vogliamo che l'interazione possa essere relativisticamente invariante.

Dal punto di vista dell'invarianza sotto il gruppo di Lorentz¹⁴¹ della matrice S , occorre osservare che, essendo $\mathcal{H} = T^{00}$, dove $T^{\mu\nu}$ è il *tensore (densità di) energia-impulso*, definito in termini della lagrangiana dalla ben nota relazione

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\rho)} \partial^\nu \phi^\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \Rightarrow \\ \Rightarrow T^{00} \equiv \mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\rho} \dot{\phi}^\rho - \mathcal{L} \end{aligned} \quad (3.802)$$

ne segue che la densità hamiltoniana non è, in generale, scalare sotto il gruppo di Lorentz per cui nemmeno S , definita in termini di \mathcal{H} , lo sarebbe...

C'è però un'importante eccezione che è quella dell'accoppiamento diretto dei campi, cioè senza termini che coinvolgono le loro derivate¹⁴². In questo caso, infatti, per quanto riguarda il contributo dovuto alla sola interazione, risulta

$$T^{\mu\nu}(x) = -\mathcal{L}(x) \delta^{\mu\nu}$$

e quindi (stiamo indicando con $\mathcal{L}(x)$ solo il termine di interazione ...!)

$$\mathcal{H}'(x) = -\mathcal{L}(x) \quad (3.803)$$

che è scalare. Questa identità (3.803) viene assunta comunque valida in ogni circostanza, per cui risulta, in definitiva, che

$$S \equiv \mathcal{T} \left(e^{i \int \mathcal{L}(x) d^4x} \right) \quad (3.804)$$

¹⁴¹Come abbiamo visto, fissato un riferimento inerziale, l'ampiezza di decadimento da uno stato iniziale $|\chi_\alpha\rangle$ e uno stato finale $|\chi_\beta\rangle$ vale

$$S_{\alpha\beta} = \langle \chi_\alpha | S | \chi_\beta \rangle$$

Se andiamo in un altro sistema di riferimento, legato al precedente da una trasformazione del Gruppo di Poincaré $U(a, \Lambda)$, allora se $|\chi'_\alpha\rangle = U(a, \Lambda)|\chi_\alpha\rangle$ e $|\chi'_\beta\rangle = U(a, \Lambda)|\chi_\beta\rangle$ sono gli stessi stati $|\chi_\alpha\rangle$ e $|\chi_\beta\rangle$ visti nel nuovo riferimento, essendo il sistema fisico rimasto il solito e così pure la dinamica dell'interazione, deve evidentemente essere che

$$S_{\alpha\beta} = \langle \chi_\alpha | S | \chi_\beta \rangle = \langle \chi'_\alpha | S | \chi'_\beta \rangle$$

ovvero

$$S = U^{-1}(a, \Lambda) S U(a, \Lambda) \quad (3.801)$$

i.e., la matrice S deve commutare con tutti gli operatori che, nello spazio di Hilbert degli stati, rappresentano il gruppo di Poincaré (occorre e basta che accada per i generatori della rappresentazione ...) e, in questo senso, deve quindi essere un operatore scalare e invariante per traslazioni.

¹⁴²In realtà, già nel caso dell'interazione elettromagnetica con un campo scalare carico, c'è un accoppiamento derivativo. Si dimostra comunque che, anche in questi casi, l'espressione corretta da usare per la matrice S è la (3.804).

Molto spesso la matrice S viene riscritta nella forma seguente

$$S = I + R \quad (3.805)$$

separando cioè il termine che descrive l'assenza di interazione dagli altri. Evidentemente, dalla definizione, risulta

$$\begin{aligned} R &= \mathcal{T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n) \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \mathcal{T} (\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)) \end{aligned} \quad (3.806)$$

Consideriamo adesso lo sviluppo della matrice S al primo ordine perturbativo. Si ha

$$S = I + i \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad \Rightarrow \quad R = i \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (3.807)$$

Supponiamo, come al solito, che gli stati¹⁴³ iniziali e finali $|\chi_a\rangle$ e $|\chi_b\rangle$ siano anche autostati dell'impulso spaziale e indichiamo con p_a e p_b gli autovalori del quadrimpulso ad essi corrispondenti. Risulta

$$R_{ba} = \langle \chi_b | S - I | \chi_a \rangle = i \langle \chi_b | \int d^4x \mathcal{L}(x) | \chi_a \rangle \quad (3.808)$$

D'altronde sappiamo che l'operatore di quadrimpulso P^μ è il generatore delle traslazioni spazio-temporali, ovvero

$$U(a) = e^{iaP} = e^{ia_\mu P^\mu} \quad (3.809)$$

per cui

$$e^{iPy} \mathcal{L}(x) e^{-iPy} = \mathcal{L}(x + y) \quad (3.810)$$

e dunque

$$\mathcal{L}(x) = e^{iPx} \mathcal{L}(0) e^{-iPx} \quad (3.811)$$

per cui, in definitiva, si ha

$$\begin{aligned} R_{ba} &= i \langle \chi_b | \int d^4x e^{iPx} \mathcal{L}(0) e^{-iPx} | \chi_a \rangle = i \int d^4x e^{ix(p_b - p_a)} \langle \chi_b | \mathcal{L}(0) | \chi_a \rangle = \\ &= i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) \langle \chi_b | \mathcal{L}(0) | \chi_a \rangle \end{aligned} \quad (3.812)$$

Questa struttura del risultato

$$R_{ba} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) \mathcal{M}_{ba} \quad (3.813)$$

¹⁴³Si ricordi che per questi stati, essendo liberi, la rappresentazione di interazione coincide con quella di Heisenberg e dunque essi non evolvono nel tempo.

si può dimostrare¹⁴⁴ che resta sempre valida, indipendentemente dall'ordine dello sviluppo perturbativo.

La quantità \mathcal{M}_{ba} viene chiamata *elemento di matrice (invariante) della transizione*.

Osserviamo che l'espressione di cui alla (3.813), da un punto di vista strettamente fisico, discende unicamente dalla conservazione del quadrimpulso¹⁴⁵, i.e. dal fatto che gli stati iniziali e finali devono comunque avere $p_a = p_b$.

Nel caso, poi, in cui il processo di interazione possa essere rappresentato troncando lo sviluppo al primo ordine, da quanto precede risulta evidentemente che

$$\mathcal{M}_{ba} = \langle \chi_b | \mathcal{L}(0) | \chi_a \rangle \quad (3.814)$$

In ogni caso, se P_a e P_b sono gli autovalori dello stato iniziale e finale, da quanto precede possiamo concludere, comunque, che risulta¹⁴⁶

$$S_{ba} = \delta_{ba} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \mathcal{M}_{ba} \quad (3.815)$$

Supponiamo, per il momento, di sapere¹⁴⁷ come fare per determinare l'elemento di matrice invariante \mathcal{M}_{ba} : il nostro scopo è comunque quello di arrivare a fare

¹⁴⁴Consideriamo infatti un generico termine dello sviluppo perturbativo

$$\langle b | \int dx dy \dots dz \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \dots \mathcal{L}(z) | a \rangle$$

Vogliamo dimostrare che esso contiene in modo intrinseco il fattore $\delta^4(p_b - p_a)$. Effettuiamo, infatti, sull'operatore la seguente trasformazione

$$\begin{aligned} & \int dx dy \dots dz \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \dots \mathcal{L}(z) = \\ &= \int dx dy \dots dz U(x) \mathcal{L}(0) U^{-1}(x) U(x) \mathcal{L}(y-x) U^{-1}(x) \dots U(x) \mathcal{L}(z-x) U^{-1}(x) = \\ &= \int dX dY \dots dZ U(x) [\mathcal{L}(0) \mathcal{L}(Y-x) \dots \mathcal{L}(Z-x)] U^{-1}(x) \end{aligned}$$

per cui, sostituendo (si noti che questo non interferisce con l'ordinamento temporale e quindi con il prodotto T-ordinato) si ha

$$\begin{aligned} & \langle b | \int dx dy \dots dz \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \dots \mathcal{L}(z) | a \rangle = \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_a) \langle b | \int dY \dots dZ \langle b | \mathcal{L}(0) \mathcal{L}(Y) \dots \mathcal{L}(Z) | a \rangle \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $Y = y - x$; $\dots Z = z - x$.

Risulta così provato quanto volevamo dimostrare.

¹⁴⁵Nel caso dello scattering da potenziale, avevamo trovato una delta di conservazione solo dell'energia. Questo era dovuto al fatto che, in quel processo, solo l'energia era conservata e non l'impulso spaziale, per via proprio del potenziale esterno ...

¹⁴⁶Abbiamo indicato formalmente il prodotto scalare $\langle \chi_b | \chi_a \rangle$ con il simbolo δ_{ba} ; ma la sua forma esplicita dipende, naturalmente, dalla normalizzazione degli stati...

¹⁴⁷Il calcolo di \mathcal{M}_{ba} è, in genere, un'impresa piuttosto laboriosa. Esso viene usualmente

confronti con dati sperimentali ovvero, tipicamente, determinare sezioni d'urto di processi di scattering, vite medie di particelle instabili, etc ...

Come è legata \mathcal{M}_{ba} con queste grandezze ?

Evidentemente, per quanto detto sopra, la probabilità che dallo stato a si sia passati allo stato b , quando $b \neq a$, sarà

$$W_{ba} = |S_{ba}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \cdot |\mathcal{M}_{ba}|^2 \quad (3.816)$$

e qui abbiamo una espressione che richiede di essere trattata, dal punto di vista matematico, con una qualche cautela ... Abbiamo infatti ottenuto il quadrato di una δ di Dirac che non è un operatore ben definito !

Ma vediamo come è nato. La delta si origina dall'integrale

$$\int e^{i(P_a - P_b)x} d^4x \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b)$$

Il quadrato della delta, dunque, significa

$$\begin{aligned} & \int e^{i(P_a - P_b)x} d^4x \cdot \int e^{i(P_a - P_b)y} d^4y \rightarrow \\ & \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \cdot \int e^{i0} d^4y = (2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \cdot VT \end{aligned} \quad (3.817)$$

dove il prodotto VT è il quadri-volume di integrazione, che, a stretto rigore, è appunto ∞^4 , ma che noi tratteremo inizialmente come se fosse finito, per poi passare al limite solo alla fine...

Dunque, al prezzo di questi "maltrattamenti" della matematica, abbiamo

$$W_{ba} = (2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \cdot VT \cdot |\mathcal{M}_{ba}|^2 \quad (3.818)$$

Va detto comunque che, siccome in generale lo stato b appartiene al continuo, noi in realtà saremo interessati più che alla probabilità di transizione verso un particolare stato b , a quella verso un gruppo di stati *vicini* allo stato b .

La Regola d'oro di Fermi ci dice allora che dovremo moltiplicare W_{ba} per il numero di stati finali permessi, ovvero per il numero di cellette dello spazio delle fasi disponibile, i.e. per la quantità

$$d\mathcal{N} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3p_i V}{h^3} \right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3p_i V}{(2\pi)^3} \right) \quad (3.819)$$

dove n è il numero di frammenti nello stato finale ed abbiamo usato il fatto che, per il principio di indeterminazione, una cella dello spazio delle fasi ha dimensione

effettuato con l'ausilio del metodo dei *grafici di Feynman*, che, fissato l'ordine perturbativo desiderato, consente, attraverso regole abbastanza semplici, caratteristiche dell'interazione studiata, di poter tener conto di tutti i vari contributi all'ampiezza di scattering.

$\hbar = 2\pi \hbar$ e noi abbiamo convenuto di porre $\hbar = 1$.
Quindi, con questa precisazione, risulta piuttosto che

$$dW_{ba} = (2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \cdot V T \cdot |\mathcal{M}_{ba}|^2 \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i V}{(2\pi)^3} \right) \quad (3.820)$$

ovvero otteniamo una probabilità di transizione per unità di tempo pari a

$$\frac{d}{dt}(dW_{ba}) = (2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \cdot V \cdot |\mathcal{M}_{ba}|^2 \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i V}{(2\pi)^3} \right) \quad (3.821)$$

Osserviamo adesso che per poter procedere al calcolo esplicito dell'elemento di matrice \mathcal{M}_{ba} , occorre aver definito la normalizzazione degli stati asintotici fra cui valutarla.

L'espressione (3.821) vale nel caso che gli stati siano normalizzati all'unità in tutto lo spazio; ma non è questa una scelta ragionevole, non foss'altro per il motivo che gli stati a e b sono autostati dell'energia e dell'impulso corrispondenti ad autovalori nel continuo e quindi non hanno né possono norma finita !

Quello che potremo fare in generale sarà, in realtà, solo di poter scegliere il valore delle densità spaziali ρ_i di particelle descritte dalle funzioni d'onda associate agli stati asintotici e quindi occorrerà dividere la (3.821) per gli opportuni coefficienti di normalizzazione $\rho_i V$ che ne conseguono, i.e. avremo piuttosto

$$\frac{d}{dt}(dW_{ba}) = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \cdot V}{\prod_{j=1}^k (\rho_j^{in} V)} \cdot |\mathcal{M}_{ba}|^2 \frac{\prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i V}{(2\pi)^3} \right)}{\prod_{i=1}^n (\rho_i^{out} V)} \quad (3.822)$$

dove abbiamo indicato con k il numero di frammenti nello stato iniziale.

Allo scopo di ottenere espressioni che siano relativisticamente invarianti a vista, conviene scegliere la normalizzazione¹⁴⁸ degli stati in modo che la densità spaziale di probabilità valga sempre $2E$.

¹⁴⁸Come abbiamo visto, questo corrisponde a prendere, per esempio, nel caso del campo scalare semplicemente le onde piane, i.e.

$$\langle x | \vec{p}, t \rangle = e^{-ipx}$$

senza alcun coefficiente davanti.

Nel caso del campo di Dirac, invece, questo corrisponde a normalizzare gli spinori secondo le (2.464) e (2.465), i.e. a porre

$$u^{(r)}(p) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{m + E}} u_0^{(r)} \quad ; \quad v^{(r)}(p) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E}} v_0^{(r)}$$

per cui, per esempio, per la particella, risulta che (cfr.(2.677))

$$\langle x | p, s \rangle = u^{(s)}(p) e^{-ipx}$$

In questo caso, la probabilità differenziale per unità di tempo diviene dunque

$$\frac{d}{dt}(dW_{ba}) = (2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 (2E_i)} \right) \cdot \frac{V}{\prod_{j=1}^k (2E_j V)} |\mathcal{M}_{ba}|^2 \quad (3.823)$$

La quantità $(2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b)$, che descrive semplicemente la conservazione del quadrimpulso nel processo, moltiplicata per la produttoria che la segue nella (3.823), i.e. la quantità

$$d\Phi \equiv (2\pi)^4 \delta^4(P_a - P_b) \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 (2E_i)} \right) \quad (3.824)$$

viene chiamata¹⁴⁹ *elemento invariante dello spazio delle fasi* (o anche *dLips: differential Lorentz invariant phase space*) ed ha a che fare con la cinematica dello stato finale del processo considerato, fissate le condizioni iniziali, descritte appunto attraverso la delta di conservazione.

La cinematica dello stato iniziale si trova, invece, nel termine \mathcal{F} , definito dalla relazione

$$\frac{1}{\mathcal{F}} \equiv \frac{V}{\prod_{j=1}^k (2E_j V)} \quad (3.825)$$

mentre la dinamica del processo resta, invece, tutta dentro il modulo quadro dell'elemento di matrice $|\mathcal{M}_{ba}|^2$, legato direttamente all'interazione.

In termini di queste quantità, risulta allora che

$$\frac{d}{dt}(dW_{ba}) = \frac{1}{\mathcal{F}} |\mathcal{M}_{ba}|^2 d\Phi \quad (3.826)$$

A proposito poi della cinematica dello stato iniziale, come già detto, distingueremo sostanzialmente due casi, ovvero quello in cui partiamo da una sola o da due particelle.

Nel caso in cui lo stato iniziale sia fatto da una sola particella, i.e. nel caso di un *decadimento*, la probabilità (differenziale) per unità di tempo è il *rate* (differenziale) del decadimento, il quale vale quindi, in generale

$$d\Gamma = \frac{d}{dt}(dW_{ba}) = \frac{V}{2E V} |\mathcal{M}_{ba}|^2 \cdot d\Phi = \frac{1}{2E} |\mathcal{M}_{ba}|^2 \cdot d\Phi \quad (3.827)$$

Nel caso particolare, poi, in cui il decadimento avvenga nel sistema di riferimento dove la particella a (di massa M_a) che decade si trova a riposo (riferimento del

¹⁴⁹L.B. Okun: *Leptons and quarks*, North-Holland 1982

CM), il *rate* differenziale assume evidentemente la forma seguente¹⁵⁰

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{2M_a} |\mathcal{M}_{ba}|^2 \cdot d\Phi \quad (3.828)$$

Se invece lo stato iniziale è fatto da due particelle, ovvero si tratta di un processo di *scattering*, allora il processo stesso sarà caratterizzato da una sezione d'urto differenziale, definita come

$$\frac{d}{dt} (dW_{ba}) = d\sigma \cdot j \quad (3.829)$$

dove j è la densità di flusso incidente ($cm^{-2} sec^{-1}$).

Siccome, con la normalizzazione adottata, ci siamo riportati comunque al caso di una sola particella *proiettile* nel volume V , la quale urta contro una sola particella *bersaglio*, ecco che il flusso incidente sarà pari alla densità di particelle proiettile per il modulo della velocità relativa proiettile-bersaglio (valutata nel riferimento del bersaglio fermo), i.e.

$$j = v_{rel} \cdot (densita' \text{ della seconda particella}) = v_{rel} \times \frac{1}{V}$$

e dunque

$$d\sigma = \frac{d\left(\frac{dW_{ba}}{dt}\right)}{j} = \frac{V}{2M_1 2E_2 V^2} \frac{V}{v} |\mathcal{M}_{ba}|^2 d\Phi = \frac{1}{2M_1 2E_2 v} |\mathcal{M}_{ba}|^2 d\Phi \quad (3.830)$$

dove il termine $2M_1 2E_2 v$ è detto *termine di flusso*.

Nel riferimento in questione risulta¹⁵¹

$$M_1 E_2 v = \sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - M_1^2 M_2^2} \quad (3.831)$$

¹⁵⁰Si osservi che, poiché tanto $|\mathcal{M}_{ba}|^2$ che $d\Phi$ sono invarianti, integrando la (3.827) e la (3.828) se ne conclude che

$$\Gamma = \frac{M}{E} \Gamma_{CM} = \frac{1}{\gamma} \Gamma_{CM}$$

ovvero, essendo $\Gamma \tau = \hbar$, esse affermano il fatto ben noto secondo cui la vita media di una particella vista in un riferimento in cui essa è in moto risulta γ volte maggiore di quella osservata nel riferimento di quiete della particella

$$\tau = \gamma \tau_{CM}$$

¹⁵¹Valutiamo infatti, nel sistema di riferimento in cui M_1 è ferma, la quantità

$$\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}$$

Evidentemente, in questo riferimento, risulta

$$P_1 = (M_1, \vec{0}), \quad P_2 = (E_2, \vec{p}_2)$$

dunque

$$(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2 = (M_1 E_2)^2 - M_1^2 M_2^2 = M_1^2 (E_2^2 - M_2^2) = M_1^2 |\vec{p}_2|^2$$

quindi, finalmente, si ottiene

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} |\mathcal{M}_{ba}|^2 d\Phi \quad (3.832)$$

la quale mostra chiaramente il carattere invariante di $d\sigma$.

Questo risultato è corretto per particelle senza spin.

Se le particelle che partecipano al processo hanno anche spin, allora, nel caso in cui lo stato iniziale *non* abbia spin *definito* e quello degli stati finali *non* sia *osservato*, risulta, rispettivamente

$$d\Gamma = \frac{1}{2S_a + 1} \cdot \frac{1}{2E_a} \cdot \overline{|\mathcal{M}_{ba}|^2} d\Phi \quad (3.833)$$

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \cdot \frac{1}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} \overline{|\mathcal{M}_{ba}|^2} d\Phi \quad (3.834)$$

dove S_a è lo spin della particella che decade, S_1, S_2 quello delle due particelle che collidono e $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ indica *la somma* su tutti gli stati di spin iniziali e finali.

I fattori $\frac{1}{2S+1}$ servono appunto a tener conto che, in effetti, sugli stati iniziali occorre mediare e non sommare, come invece si deve fare su quelli finali ...

e dunque

$$\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2} = M_1 p_2$$

D'altronde, in generale, sappiamo che

$$p/E = \beta \equiv v$$

e dunque risulta provato quanto asserito, i.e. che nel riferimento in cui la prima particella è in quiete, si ha

$$\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2} = M_1 E_2 v$$

3.4 Lo spazio delle fasi

3.4.1 Lo spazio delle fasi di due particelle

Nel caso di due particelle nello stato finale, l'elemento di spazio delle fasi invariante, secondo la definizione (3.824), è

$$d\Phi = dLips(p, q; P) = (2\pi)^4 \delta^4(p + q - P) \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \quad (3.835)$$

dove p , q sono i loro quadrimpulsi, mentre P è quello di tutto il sistema ed abbiamo posto

$$E_p \equiv \sqrt{M_1^2 + |\vec{p}|^2}, \quad E_q \equiv \sqrt{M_2^2 + |\vec{q}|^2} \quad (3.836)$$

L'elemento di spazio delle fasi (3.835) può essere riscritto come dunque anche come

$$d\Phi = dLips = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + E_q - \mathcal{E}) \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{P}) \frac{d^3p}{E_p} \frac{d^3q}{E_q} \quad (3.837)$$

dove $\mathcal{E} \equiv P^0$ è l'energia totale del sistema (valutata nel particolare sistema di riferimento dove stiamo studiando il processo) mentre \vec{P} è il suo impulso totale.

Supponiamo, come di solito accade, di essere interessati ad una particella particolare, per esempio a quella di quadrimpulso p e di guardarla a prescindere dall'altra particella. Il contributo alla distribuzione che si riferisce alla particella considerata, proveniente dallo spazio delle fasi (sia che si tratti di scattering, come di un decadimento) si ottiene, evidentemente, integrando l'espressione precedente nell'altra variabile, cioè in d^3q . Otteniamo così

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E}) \frac{d^3p}{E_p \hat{E}} \quad (3.838)$$

dove abbiamo posto $\hat{E} \equiv \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2}$ a rappresentare l'energia della particella che non guardiamo, avente massa M_2 e momento lineare

$$\vec{q} = \vec{P} - \vec{p}$$

Passando in coordinate polari, risulta

$$d^3p = p^2 dp d\Omega$$

e quindi, più esplicitamente

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E}(\vec{p}) - \mathcal{E}) \frac{p^2 dp d\Omega}{E_p \hat{E}(\vec{p})} \quad (3.839)$$

D'altronde

$$E_p^2 = M_1^2 + p^2 \quad \Rightarrow \quad E_p dE_p = p dp$$

per cui si ha

$$d^3p = p E_p dE_p d\Omega$$

e dunque, finalmente

$$\begin{aligned} dLips &= \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E}) \frac{p E_p dE_p d\Omega}{E_p \hat{E}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E}) p \frac{dE_p}{\hat{E}} d\Omega \end{aligned} \quad (3.840)$$

Questo risultato è corretto in ogni sistema di riferimento.

Esso può essere ulteriormente semplificato se studiamo il processo di scattering nel sistema del CM, dove $\vec{p} + \vec{q} = \vec{P} \equiv \vec{0}$.

Indichiamo con b il modulo del momento lineare delle due particelle uscenti nel sistema del CM. Poichè

$$E_p^2 = M_1^2 + b^2 \quad E_q^2 = M_2^2 + b^2$$

abbiamo, evidentemente, che

$$b db = E_p dE_p = E_q dE_q$$

Introduciamo allora la variabile $w = E_p + E_q$. Otteniamo

$$\begin{aligned} dw &= dE_p + dE_q = \frac{b db}{E_p} + \frac{b db}{E_q} = \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} b db \\ &= \frac{w}{E_p E_q} b db = \frac{w}{E_q} dE_p = \frac{w}{E_p} dE_q \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{dw}{w} = \frac{dE_q}{E_p} = \frac{dE_p}{E_q}$$

Sostituendo allora nella espressione (3.840), otteniamo ($E_q = \hat{E}$; $w = E_p + \hat{E}$)

$$dLips = \frac{1}{16\pi^2} \delta(w - \mathcal{E}_{CM}) b \frac{dw}{w} d\Omega_{CM} \quad (3.841)$$

che può essere facilmente integrata e fornisce

$$dLips = \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{\mathcal{E}_{CM}} d\Omega_{CM} \quad (3.842)$$

Ma, per definizione, l'energia totale del sistema nel centro di massa è niente altro che

$$\mathcal{E}_{CM} = \sqrt{s} \quad (3.843)$$

mentre, per quanto riguarda il modulo dell'impulso b^{152} , risulta

$$b = \frac{\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}}{2\sqrt{s}} \quad (3.844)$$

Perciò, dalle (3.842), (3.843) e (3.844) otteniamo finalmente l'espressione seguente, scritta, per quanto possibile, in termini di invarianti di Lorentz¹⁵³

$$dLips = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}}{2s} d\Omega_{CM} \quad (3.845)$$

Nel caso si voglia determinare l'espressione dello spazio delle fasi nel sistema del Laboratorio invece che nel sistema del centro di massa, si può ripartire dall'espressione (3.839)

$$d\Phi \equiv dLips = \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E}(\vec{p}) - \mathcal{E}) \frac{p^2 dp d\Omega}{E_p \hat{E}(\vec{p})} \quad (3.846)$$

¹⁵²Ricordiamo infatti che

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{CM} &\equiv \sqrt{M_1^2 + b^2} + \sqrt{M_2^2 + b^2} \quad \Rightarrow \\ \mathcal{E}_{CM}^2 &= M_1^2 + b^2 + M_2^2 + b^2 + 2\sqrt{M_1^2 + b^2}\sqrt{M_2^2 + b^2} \quad \Rightarrow \\ 2\sqrt{M_1^2 + b^2}\sqrt{M_2^2 + b^2} &= s - M_1^2 - M_2^2 - 2b^2 \quad \Rightarrow \\ 4(M_1^2 + b^2)(M_2^2 + b^2) &= (s - M_1^2 - M_2^2 - 2b^2)^2 \quad \Rightarrow \\ 4M_1^2 M_2^2 + 4M_1^2 b^2 + 4M_2^2 b^2 + 4b^4 &= (s - M_1^2 - M_2^2)^2 + 4b^4 - 4b^2(s - M_1^2 - M_2^2) \\ \Rightarrow 4b^2 s &= (s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}}{2\sqrt{s}} \end{aligned}$$

¹⁵³E' forse utile, a questo punto, ricordare che, per la (3.844), b esiste se e solo se

$$\begin{aligned} (s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow (s - M_1^2 - M_2^2)^2 &\geq 4M_1^2 M_2^2 \\ \Rightarrow s - M_1^2 - M_2^2 &\geq 2M_1 M_2 \\ \Rightarrow s &\geq (M_1 + M_2)^2 \Rightarrow M_1 + M_2 \leq \sqrt{s} \end{aligned}$$

ovvero se e solo se siamo sopra soglia di produzione ...

dove abbiamo voluto mettere chiaramente in evidenza il fatto che non solo E_p , ma anche \hat{E} dipende da \vec{p} , essendo, come si è visto

$$\hat{E} \equiv \hat{E}(\vec{p}) = \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2}$$

Per poter aver l'espressione della dipendenza angolare della distribuzione, occorre prima fare l'integrale in dp , eliminando così la delta.

Ma l'argomento della δ di Dirac è una funzione di \vec{p} , che vale

$$F(\vec{p}) = \sqrt{M_1^2 + p^2} + \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} - \mathcal{E} \quad (3.847)$$

D'altronde la condizione $F(\vec{p}) = 0$ altri non è che la formalizzazione della conservazione dell'energia nel processo, mentre $\hat{E}_q = \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2}$ contiene la conservazione dell'impulso lineare (integrazione in $d^3q...$), quindi la soluzione

$$\hat{p} = \hat{p}(\cos\theta)$$

dell'equazione $F(\vec{p}) = 0$ è niente altro che la soluzione¹⁵⁴ che esprime l'impulso

¹⁵⁴L'equazione $F(\vec{p}) = 0$, come si è detto, esprime la conservazione dell'energia nel sistema di riferimento del Laboratorio e contiene implicitamente quella dell'impulso.

In questo riferimento, infatti, il sistema delle due particelle ha, per ipotesi, energia totale \mathcal{E} ed impulso spaziale \vec{P} che, senza perdita di generalità, potremo assumere sia diretto come l'asse z . Il quadrimpulso del sistema è dunque dato da

$$(P_{Lab}^\mu) = (\mathcal{E}, \vec{P}) = (\mathcal{E}, 0, 0, P) \Rightarrow s = \mathcal{E}^2 + P^2 \quad (3.848)$$

Questo significa che la velocità $\vec{\beta}$ del sistema del CM visto dal Laboratorio è diretta lungo l'asse z e vale, in modulo

$$\beta = \frac{P}{\mathcal{E}} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2 - P^2}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{s}} \quad (3.849)$$

D'altronde, visto che la massa invariante del sistema delle due particelle è appunto \sqrt{s} mentre le loro masse sono, rispettivamente, $M_1 \equiv m$ e $M_2 \equiv M$, ecco che, nel sistema del CM , il modulo dell'impulso spaziale di entrambe le particelle vale, come è noto

$$b = \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}}{2\sqrt{s}} \quad (3.850)$$

Dunque, nel sistema del CM , l'impulso spaziale della particella $M_1 \equiv m$ sarà dato, in generale, senza perdita di generalità, dalla relazione

$$\vec{p} = b(\sin\Theta, 0, \cos\Theta) \quad (3.851)$$

dove Θ è proprio l'angolo di scattering nel sistema del CM . Trasformando dunque all'indietro, avremo che, nel sistema del Laboratorio, sarà

$$\hat{p}_x = b \sin\Theta; \quad (3.852)$$

$$\hat{p}_y = 0; \quad (3.853)$$

$$\hat{p}_z = \gamma b \cos\Theta + \gamma\beta\sqrt{m^2 + b^2} \quad (3.854)$$

uscite della particella urtante in funzione dell'angolo di scattering, date le condizioni iniziali del processo, definite da \mathcal{E} e da \vec{P} .

dove $\sqrt{m^2 + b^2}$ è l'energia della particella considerata nel sistema del CM , tale che

$$\begin{aligned} m^2 + b^2 &= m^2 + \frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}{4s} = \frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2 + 4m^2 s}{4s} = \\ &= \frac{(s - m^2 + M^2)^2}{4s} \Rightarrow \sqrt{m^2 + b^2} = \frac{s + m^2 - M^2}{2\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (3.855)$$

Dunque, in termini dell'angolo di scattering Θ , abbiamo

$$\hat{p}_x = b \sin \Theta \quad (3.856)$$

$$\hat{p}_z = \gamma b \cos \Theta + \frac{p}{\sqrt{s}} \frac{s + m^2 - M^2}{2\sqrt{s}} = \gamma b \cos \Theta + \frac{p}{2s} (s + m^2 - M^2) \quad (3.857)$$

Ritroviamo così il fatto ben noto che l'impulso della particella nel sistema del Laboratorio sta su un'ellisse [J. Blaton: *On a geometrical interpretation of energy and momentum conservation in atomic collisions and disintegration processes*; Mat.-Fys Medd. vol 24, nr 20, 1 (1950)] avente semiasse minore pari a b , semiasse maggiore pari a γb e centro spostato di $\frac{p}{2s}(s + m^2 - M^2)$ lungo l'asse z .

Questo significa, come sappiamo, che se

$$\gamma b > \frac{p}{2s} (s + m^2 - M^2) \quad (3.858)$$

allora l'ellisse contiene l'origine e ad ogni angolo di scattering Θ nel sistema del CM ($0 \leq \Theta \leq \pi$) corrisponde uno ed un solo angolo di scattering θ nel sistema del Laboratorio ($0 \leq \theta \leq \pi$).

Invece, nel caso in cui sia

$$\gamma b < \frac{p}{2s} (s + m^2 - M^2) \quad (3.859)$$

allora l'ellisse non contiene l'origine e dunque non tutti gli angoli θ sono possibili nel sistema del Laboratorio, ma solo quelli che non eccedono un opportuno θ_{max} ; inoltre, ad ogni angolo $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$ corrispondono, in generale, due valori di Θ e dunque per ogni angolo di scattering nel sistema del Laboratorio sono possibili due valori di \hat{p} .

L'angolo θ_{max} sta nel primo quadrante: esso si può determinare in base a semplici considerazioni geometriche. Infatti, data in generale l'ellisse di equazione

$$y = b \sin \phi; \quad z = a + b \cos \phi \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z - a}{\gamma b} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 \quad (3.860)$$

allora la tangente dell'angolo θ_{max} è la pendenza k della retta $y = kz$ che intercetta l'ellisse in due punti coincidenti. Sostituendo nell'equazione dell'ellisse, si ha

$$(z - a)^2 + k^2 \gamma^2 z^2 = \gamma^2 b^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 (1 + k^2 \gamma^2) - 2za + a^2 - \gamma^2 b^2 = 0 \quad (3.861)$$

La condizione di due soluzioni coincidenti è, ovviamente, quella di discriminante nullo, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= 0 = a^2 - (1 + k^2 \gamma^2)(a^2 - \gamma^2 b^2) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - a^2 + \gamma^2 b^2 - k^2 \gamma^2 (a^2 - \gamma^2 b^2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad k^2 &= \frac{b^2}{a^2 - \gamma^2 b^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{b}{\sqrt{a^2 - \gamma^2 b^2}} \end{aligned} \quad (3.862)$$

Dunque, nel nostro caso ($a = \frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2)$) è

$$tg\theta_{max} = \frac{b}{\sqrt{[\frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2)]^2 - \gamma^2 b^2}} \quad (3.863)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} \left[\frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2) \right]^2 - \gamma^2 b^2 &= \frac{P^2}{4s^2}(s + m^2 - M^2)^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{s} \frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}{4s} = \\ &= \frac{P^2(s + m^2 - M^2)^2 - (s + P^2) [(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2]}{4s^2} = \\ &= \frac{P^2 [s^2 + m^4 + M^4 + 2sm^2 - 2sM^2 - 2m^2 M^2 - (s^2 - 2sm^2 - 2sM^2 + m^4 + M^4 + 2m^2 M^2 - 4m^2 M^2)]}{4s^2} \\ &= \frac{s [(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2]}{4s^2} = \frac{P^2 4sm^2}{4s^2} - \frac{[(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2]}{4s} = \\ &= \frac{4m^2 P^2 - (s - m^2 - M^2)^2 + 4m^2 M^2}{4s} = \frac{4m^2 (M^2 + P^2) - (s - m^2 - M^2)^2}{4s} \end{aligned} \quad (3.864)$$

dunque, ricordando la definizione di b , abbiamo infine

$$tg\theta_{max} = \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}}{\sqrt{4m^2 (M^2 + P^2) - (s - m^2 - M^2)^2}} \quad (3.865)$$

Torniamo ora alla condizione che discrimina il caso in cui c'è corrispondenza uno a uno fra Θ e θ e quello in cui questo non accade. Riscriviamo, per questo, la condizione in questione: abbiamo visto che c'è corrispondenza uno a uno se e solo se

$$\gamma b > \frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2) \quad (3.866)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{s}} \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}}{2\sqrt{s}} &> \frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2) \\ \Rightarrow \frac{P}{\mathcal{E}} < \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2 M^2}}{s + m^2 - M^2} &\equiv \frac{b}{\sqrt{b^2 + m^2}} \end{aligned} \quad (3.867)$$

E questo risultato mostra che, come era ovvio che dovesse essere, affinché la condizione (3.866) sia soddisfatta occorre e basta che la velocità β_{CM} del sistema del CM ($\beta_{CM} \equiv \frac{P}{\mathcal{E}}$) sia inferiore al modulo della velocità della particella considerata (di massa $M_1 = m$ nel sistema del CM ($\beta_1^{CM} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + m^2}}$)).

Ma riveniamo adesso alla questione da cui eravamo partiti, cioè a quella di esplicitare la funzione $\hat{p} = \hat{p}(\cos\theta)$.

L'espressione trovata in funzione dell'angolo di scattering Θ nel sistema del CM non è la più adatta per questo scopo: ci è servita solo per capire se e quando ci dobbiamo aspettare limitazioni dalla cinematica del processo sul valore stesso dell'angolo di scattering θ nel sistema del Laboratorio.

Ripartiamo dunque dall'equazione $F(\vec{p}) = 0$, dove la funzione F è data dalla (3.847), i.e.

$$F(\vec{p}) = \sqrt{M_1^2 + p^2} + \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} - \mathcal{E} = 0 \quad (3.868)$$

la quale fornisce, evidentemente, la relazione

$$\mathcal{E} = \sqrt{M_1^2 + p^2} + \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} \quad (3.869)$$

dalla quale si ha

$$\sqrt{M^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} = \mathcal{E} - \sqrt{m^2 + p^2} \quad (3.870)$$

ovvero, elevando al quadrato

$$M^2 + P^2 - 2Pp\cos\theta + p^2 = \mathcal{E}^2 + m^2 + p^2 - 2\mathcal{E}\sqrt{m^2 + p^2} \quad (3.871)$$

dove θ è proprio l'angolo di scattering nel sistema del Laboratorio, i.e. l'angolo fra l'impulso complessivo del sistema \vec{P} e l'impulso \vec{p} della particella in esame, dopo il processo d'urto. Semplificando, ricordando che $s \equiv \mathcal{E}^2 - P^2$ otteniamo

$$2\mathcal{E}\sqrt{m^2 + p^2} = s + 2Pp\cos\theta - M^2 + m^2 \quad (3.872)$$

da cui, quadrando ancora, si ricava

$$\begin{aligned} 4\mathcal{E}^2(m^2 + p^2) &= (s + m^2 - M^2)^2 + 4pP\cos\theta(s + m^2 - M^2) + 4p^2P^2\cos^2\theta \\ \Rightarrow 4p^2(\mathcal{E}^2 - P^2\cos^2\theta) - 4pP(s + m^2 - M^2)\cos\theta + 4m^2\mathcal{E}^2 - (s + m^2 - M^2)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.873)$$

D'altronde $\mathcal{E}^2 - P^2\cos^2\theta = \mathcal{E}^2 - P^2 + P^2\sin^2\theta = s + P^2\sin^2\theta$ quindi l'equazione a cui arriviamo infine è la seguente

$$4p^2(s + P^2\sin^2\theta) - 4pP(s + m^2 - M^2)\cos\theta + 4m^2\mathcal{E}^2 - (s + m^2 - M^2)^2 = 0 \quad (3.874)$$

la quale è un'equazione di secondo grado nell'impulso incognito p della particella di massa m , parametrica in θ (tutte le altre quantità sono fissate dalle condizioni iniziali).

Il discriminante ridotto dell'equazione vale

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= 4P^2(s + m^2 - M^2)^2\cos^2\theta - 4(s + P^2\sin^2\theta)[4m^2\mathcal{E}^2 - (s + m^2 - M^2)^2] = \\ &= (s + m^2 - M^2)^2[4P^2\cos^2\theta + 4(s + P^2\sin^2\theta)] - 4(s + P^2\sin^2\theta)4m^2\mathcal{E}^2 = \\ &= (s + m^2 - M^2)^2(4s + 4P^2) - 4m^24\mathcal{E}^2(s + P^2\sin^2\theta) = \\ &= 4\mathcal{E}^2(s + m^2 - M^2)^2 - 4\mathcal{E}^24m^2(s + P^2\sin^2\theta) = \\ &= 4\mathcal{E}^2[(s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2(s + P^2\sin^2\theta)] \end{aligned} \quad (3.875)$$

Evidentemente questo è sempre positivo, qualunque sia l'angolo θ , se e solo se

$$(s + m^2 - M^2)^2 > 4m^2(s + P^2) \equiv 4m^2\mathcal{E}^2 \quad (3.876)$$

ovvero se e solo se

$$\begin{aligned} (s + m^2 - M^2) &> 2m\mathcal{E} \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + b^2} \cdot 2\sqrt{s} > 2m\mathcal{E} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m^2 + b^2}}{m} &> \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{s}} \Leftrightarrow \gamma_1^{(CM)} > \gamma_{CM} \end{aligned} \quad (3.877)$$

in accordo con quanto avevamo già ottenuto con la relazione (3.867) ($\gamma_1^{(CM)}$ è il γ delle particelle di massa $m = M_1$ nel sistema del CM , mentre γ_{CM} è il γ del sistema del CM visto dal sistema del Laboratorio).

Supponendo adesso, per semplicità, che valga la condizione

$$\gamma_1^{(CM)} > \gamma_{CM} \Leftrightarrow \beta_1^{(CM)} > \beta_{CM} \quad (3.878)$$

allora, poiché il termine noto dell'equazione di secondo grado è evidentemente negativo, essendo il coefficiente di p^2 positivo, l'equazione ha due radici di segno opposto. Siccome la soluzione che cerchiamo deve essere positiva, essendo il modulo di un vettore, essa sarà la maggiore delle due, ovvero coinciderà necessariamente con

$$\begin{aligned} \hat{p}(\theta) &\equiv p_+ = \frac{2P(s + m^2 - M^2) + \sqrt{\Delta/4}}{4(s + P^2 \sin^2 \theta)} = \\ &= \frac{2P(s + m^2 - M^2) + 2\mathcal{E}\sqrt{(s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2(s + P^2 \sin^2 \theta)}}{4(s + P^2 \sin^2 \theta)} = \\ &= \frac{P(s + m^2 - M^2) + \mathcal{E}\sqrt{(s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2 - 4m^2P^2 \sin^2 \theta}}{2(s + P^2 \sin^2 \theta)} \end{aligned} \quad (3.879)$$

Nel caso che sia $\gamma_1^{(CM)} < \gamma_{CM} \Leftrightarrow \beta_1^{(CM)} < \beta_{CM}$ allora, come già sappiamo, non tutti gli angoli di scattering θ nel sistema Laboratorio sono possibili, ma solo quelli per i quali $\Delta/4 \geq 0$, i.e.

$$\begin{aligned} (s + m^2 - M^2)^2 &> 4m^2(s + P^2 \sin^2 \theta) \Leftrightarrow (s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2s > 4m^2P^2 \sin^2 \theta \\ &\Leftrightarrow (s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2 > 4m^2P^2 \sin^2 \theta \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \theta \leq \sin^2 \theta_{max} \equiv \frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}{4m^2P^2} \end{aligned} \quad (3.880)$$

da cui, appunto,

$$\cos^2 \theta_{max} = 1 - \sin^2 \theta_{max} = \frac{4m^2P^2 + 4m^2M^2 - (s - m^2 - M^2)^2}{4m^2P^2} \quad (3.881)$$

e dunque, come avevamo già trovato,

$$\text{tg} \theta_{max} = \sqrt{\frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}{4m^2P^2 + 4m^2M^2 - (s - m^2 - M^2)^2}} \quad (3.882)$$

essendo θ_{max} nel primo quadrante.

Nel caso, comunque, in cui $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$, cioè quando l'equazione di secondo grado in p ha soluzioni reali, allora, visto che il termine noto dell'equazione è positivo come il coefficiente di p^2 , entrambe le soluzioni devono essere dello stesso segno.

Siccome p_+ è positivo poiché $P(s + m^2 - M^2) > 0$, allora anche p_- è positiva e dunque entrambe le soluzioni sono accettabili. Risultano così due diversi valori di \hat{p} per uno stesso valore di θ ed essi sono tali che

$$\hat{p}_{\pm}(\theta) = \frac{P(s + m^2 - M^2) \pm \mathcal{E}\sqrt{(s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2 - 4m^2P^2 \sin^2 \theta}}{2(s + P^2 \sin^2 \theta)} \quad (3.883)$$

Quanto poi alla delta, sappiamo che, in generale, avremo (assumiamo per semplicità una sola soluzione $\hat{p} = \hat{p}(\theta)$)

$$\delta(F(\vec{p})) = \delta(p - \hat{p}) \frac{1}{\left. \frac{dF}{dp} \right|_{p=\hat{p}}}$$

per cui, data la (3.847), risulta

$$\left. \frac{dF}{dp} \right|_{p=\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{E_{\hat{p}}} + \frac{\hat{p} - P \cos \theta}{\hat{E}_{\hat{p}}} = \frac{\hat{E}_{\hat{p}} \hat{p} + E_{\hat{p}} \hat{p} - E_{\hat{p}} P \cos \theta}{E_{\hat{p}} \hat{E}_{\hat{p}}}$$

e quindi, sostituendo nella (3.846), si ha

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2} \delta(E_p + \hat{E}(p) - \mathcal{E}) \frac{p^2 dp d\Omega}{E_p \hat{E}(p)} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \delta(p - \hat{p}) \frac{E_{\hat{p}} \hat{E}_{\hat{p}}}{\hat{E}_{\hat{p}} \hat{p} + E_{\hat{p}} \hat{p} - E_{\hat{p}} P \cos \theta} \frac{p^2 dp d\Omega}{E_p \hat{E}(p)} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{E_{\hat{p}} \hat{E}_{\hat{p}}}{\hat{E}_{\hat{p}} \hat{p} + E_{\hat{p}} \hat{p} - E_{\hat{p}} P \cos \theta} \frac{\hat{p}^2 d\Omega}{E_{\hat{p}} \hat{E}_{\hat{p}}} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{\hat{p}^2 d(-\cos \theta)}{\hat{E}_{\hat{p}} \hat{p} + E_{\hat{p}} \hat{p} - E_{\hat{p}} P \cos \theta} = \frac{1}{8\pi} \frac{\hat{p} d(-\cos \theta)}{\hat{E}_{\hat{p}} + E_{\hat{p}} - E_{\hat{p}} \frac{P}{\hat{p}} \cos \theta} \quad (3.884) \end{aligned}$$

Chiaramente, però

$$\hat{E}_{\hat{p}} + E_{\hat{p}} = \mathcal{E}$$

per cui, finalmente, si può scrivere che, per un sistema di due particelle aventi quadriimpulso totale (\mathcal{E}, \vec{P}) , l'elemento invariante di spazio delle fasi nel sistema del Laboratorio (integrato nell'angolo azimutale), relativo ad una qualunque delle due particelle, è espresso dalla relazione¹⁵⁵

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi} \frac{\hat{p} d(-\cos \theta)}{\mathcal{E} - E_{\hat{p}} \frac{P}{\hat{p}} \cos \theta} \quad (3.885)$$

dove $(E_{\hat{p}}, \hat{p})$ è il suo quadriimpulso dopo il processo d'urto, mentre θ è l'angolo polare (di scattering), entrambi misurati nel laboratorio.

¹⁵⁵J.D. Bjorken and S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, Ch.16 McGraw Hill, 1965

3.4.2 Lo spazio delle fasi di tre particelle: il plot di Dalitz

Consideriamo per concretezza un processo di decadimento¹⁵⁶ a tre corpi

$$X \rightarrow A + B + C$$

dove X abbia massa M , mentre A, B, C abbiano, rispettivamente, masse m_A, m_B ed m_C , con, ovviamente

$$M \geq m_A + m_B + m_C$$

Abbiamo visto dalla (3.833) che, mediando sullo spin iniziale e sommando su quelli finali, quanto al rate di decadimento, risulta

$$d\Gamma = \frac{1}{2J+1} \frac{1}{2E} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi \quad (3.886)$$

dove J è lo spin della particella X , E è la sua energia nel sistema di riferimento scelto, $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ è la somma dei moduli quadri degli elementi di matrice per i vari stati di spin iniziali e finali.

L'elemento di spazio delle fasi per tre particelle nello stato finale, data la (3.824), si scrive, evidentemente, come

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta^4(p + q + k - P) \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \quad (3.887)$$

dove p, q, k sono, rispettivamente, i quadrimpulsi delle particelle A, B, C mentre P è quello della particella X . Come si vede, l'elemento $d\Phi$ e quindi $d\Gamma$ (attraverso $d\Phi$ e $|\overline{\mathcal{M}}|^2$) dipendono formalmente da 9 variabili, i.e. \vec{p} , \vec{q} e \vec{k} . L'integrazione della δ^4 ne elimina 4, per cui si resta così con 5 variabili effettive.

Cerchiamo adesso di capire meglio la natura cinematica di queste variabili restanti e di determinare quali sono quelle su cui si può integrare ulteriormente, certi che $d\Gamma$ non potrà comunque essere da loro dipendente (attraverso $|\overline{\mathcal{M}}|^2$).

Per far questo, mettiamoci nel sistema del CM, ovvero nel sistema di riferimento in cui X è in quiete. L'impulso lineare \vec{p} della particella A , per esempio, potrà, a priori, essere orientato in una direzione qualsiasi, e questo comporta 2 angoli di Eulero ! Gli altri due impulsi, \vec{q} e \vec{k} , dovranno essere coplanari con \vec{p} , dato che la somma dei tre impulsi è nulla: ma il piano potrà essere qualsiasi e dunque esiste ancora un angolo di rotazione *azimutale* intorno a \vec{p} , che fissa la posizione di questo piano.

In conclusione, dei 5 parametri liberi da cui dipende $d\Phi$, 3 sono angoli che *fissano* nello spazio la terna $\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}$ ma da cui $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ non può dipendere, almeno

¹⁵⁶Nel caso di un processo di scattering con tre corpi nello stato finale, le considerazioni sullo spazio delle fasi sono del tutto analoghe, solo che, invece di *rate di decadimento* $d\Gamma$ parleremo di *sezione d'urto differenziale* $d\sigma$ ed al posto del fattore $\frac{1}{2S+1} \cdot \frac{1}{2E}$ ci sarà, come abbiamo visto, il termine di flusso, ovvero il fattore $\frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \cdot \frac{1}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}$

nell'ipotesi di isotropia dello spazio (stiamo, comunque, qui assumendo implicitamente che la particella che decade non sia polarizzata)...

Potremo quindi integrare su di essi, per arrivare infine ad un elemento dello spazio delle fasi del sistema che, come pure $|\mathcal{M}|^2$, potrà dipendere solo da due parametri cinematici del processo.

Vediamo qual è la forma che $d\Phi$ finisce dunque per assumere.

Essendo $d\Phi$ un invariante di Lorentz, operiamo nel sistema del CM, dove appunto $\vec{P} = 0$. Ripartiamo dalla (3.887) ed integriamo in d^3k . Si ha

$$d\Phi = \frac{(2\pi^4)}{(2\pi)^9} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_q} \frac{1}{2\hat{E}} \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) d^3p d^3q \quad (3.888)$$

dove, per tener conto che $\vec{p} + \vec{q} + \vec{k} = 0$, abbiamo definito

$$\hat{E} \equiv \sqrt{m_C^2 + |\vec{p} + \vec{q}|^2} \quad (3.889)$$

Passando in coordinate polari per quanto riguarda \vec{p} , abbiamo

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) p^2 dp d\Omega_p d^3q \quad (3.890)$$

Possiamo integrare su $d\Omega_p$, e questo corrisponde a sommare sulle direzioni di \vec{p} nello spazio: otteniamo

$$d\Phi = \frac{4\pi}{(2\pi)^5} \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) p^2 dp d^3q \quad (3.891)$$

Avendo integrato in $d\Omega_p$, abbiamo "assorbito" i due gradi di libertà relativi all'orientazione del vettore \vec{p} nello spazio (il vettore \vec{q} qui è pensato "rigidamente legato" al vettore \vec{p}), per cui, da ora in poi, dobbiamo ritenere \vec{p} *fisso* nello spazio, per esempio orientato secondo l'asse z .

Usando ancora le coordinate polari per \vec{q} , ma riferite stavolta a \vec{p} come asse polare (per quanto riguarda l'integrazione precedente in d^3p , l'asse polare di riferimento era arbitrario!), abbiamo, evidentemente

$$d^3q = q^2 dq \sin\theta d\theta d\phi$$

ma l'argomento della δ dipende solo dall'angolo θ fra i vettori \vec{p} e \vec{q} e non dall'angolo azimutale ϕ , attraverso la quantità

$$|\vec{p} + \vec{q}|^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cos\theta$$

quindi di può integrare in $d\phi$ (e questo corrisponde appunto alla arbitrarietà di scelta del piano su cui giacciono i tre vettori $\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}, \dots$), ottenendo così

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{4\pi}{(2\pi)^5} 2\pi \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) p^2 dp q^2 dq \sin\theta d\theta \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) p^2 dp q^2 dq d(-\cos\theta) \end{aligned} \quad (3.892)$$

Possiamo ora integrare in $\cos\theta$ per eliminare la δ di Dirac. Il solo termine nel suo argomento che dipende da $\cos\theta$ è

$$\hat{E} = \sqrt{m_C^2 + p^2 + q^2 + 2pq \cos\theta}$$

e si ha

$$\left| \frac{\partial(E_p + E_q + \hat{E})}{\partial(-\cos\theta)} \right| = \left| \frac{\partial \hat{E}}{\partial(-\cos\theta)} \right| = \frac{2pq}{2\hat{E}} = \frac{pq}{\hat{E}} \quad (3.893)$$

quindi¹⁵⁷

$$d\Phi = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \delta(-\cos\theta + \cos\bar{\theta}) \frac{1}{\frac{pq}{\hat{E}}} p^2 dp q^2 dq d(\cos\theta) \quad (3.894)$$

dove abbiamo indicato con $\cos\bar{\theta}$ la soluzione in $\cos\theta$ dell'equazione

$$E_p + E_q + \hat{E} - M = 0$$

i.e. dell'equazione

$$\sqrt{m_A^2 + p^2} + \sqrt{m_B^2 + q^2} + \sqrt{m_C^2 + p^2 + q^2 + 2pq \cos\theta} = M$$

Integrando, risulta

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p 2E_q 2\hat{E}} \frac{\hat{E}}{pq} p^2 dp q^2 dq \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p 2E_q} p dp q dq \end{aligned} \quad (3.895)$$

D'altronde, essendo

$$E_p \equiv \sqrt{m_A^2 + p^2}; \quad E_q \equiv \sqrt{m_B^2 + q^2}$$

risulta

$$p dp = E_p dE_p; \quad q dq = E_q dE_q$$

per cui, in conclusione, per l'elemento di spazio delle fasi invariante di un sistema di tre particelle, nel CM si ha semplicemente

$$d\Phi = \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_p dE_q \quad (3.896)$$

¹⁵⁷Ricordiamo a questo proposito che se $f(x)$ è una funzione derivabile, allora, se indichiamo con x_i i suoi zeri, i.e. i punti per i quali $f(x_i) = 0$, se accade che $\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_i} \neq 0$, risulta

$$\delta(f(x)) dx = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i}} dx$$

Poniamo adesso, per comodità di notazione

$$p_1 \equiv p \quad p_2 \equiv q \quad p_3 \equiv k$$

$$m_1 \equiv m_A \quad m_2 \equiv m_B \quad m_3 \equiv m_C$$

e definiamo i seguenti invarianti di Lorentz (masse invarianti quadre delle tre possibili coppie di particelle)

$$s_1 \equiv (p_2 + p_3)^2 = m_2^2 + m_3^2 + 2(p_2 p_3) \quad (3.897)$$

$$s_2 \equiv (p_1 + p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2(p_1 p_3) \quad (3.898)$$

$$s_3 \equiv (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1 p_2) \quad (3.899)$$

Evidentemente, dalla conservazione del quadrimpulso, risulta anche

$$s_1 \equiv (P - p_1)^2 = M^2 + m_1^2 - 2(P p_1) \quad (3.900)$$

$$s_2 \equiv (P - p_2)^2 = M^2 + m_2^2 - 2(P p_2) \quad (3.901)$$

$$s_3 \equiv (P - p_3)^2 = M^2 + m_3^2 - 2(P p_3) \quad (3.902)$$

che, nel sistema del CM, diventano¹⁵⁸

$$s_1 = M^2 + m_1^2 - 2M E_1 \quad (3.904)$$

$$s_2 = M^2 + m_2^2 - 2M E_2 \quad (3.905)$$

$$s_3 = M^2 + m_3^2 - 2M E_3 \quad (3.906)$$

Il loro significato fisico è proprio quello descritto nel riferimento del CM dalle relazioni (3.904)-(3.906): descrivono, a parte costanti, l'energia nel CM delle tre particelle. Risulta

$$ds_1 = -2M dE_1 \equiv -2M dE_p \quad (3.907)$$

$$ds_2 = -2M dE_2 \equiv -2M dE_q \quad (3.908)$$

e quindi, *poichè* $d\Phi$ è *invariante di Lorentz* e nel CM assume la forma

$$d\Phi = \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_p dE_q = \frac{1}{4(2\pi)^3} \frac{ds_1 ds_2}{(2M)^2} \quad (3.909)$$

¹⁵⁸I tre invarianti non sono indipendenti fra loro, infatti sommando le (3.904)-(3.906) e ricordando che nel CM

$$E_1 + E_2 + E_3 \equiv E_A + E_B + E_C \equiv E_p + E_q + E_k = M$$

si ottiene

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= 3M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2M(E_1 + E_2 + E_3) = \\ &= M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \end{aligned} \quad (3.903)$$

essendo s_1 ed s_2 invarianti, l'espressione (3.909) deve essere valida in ogni sistema di riferimento¹⁵⁹.

In conclusione, per tre particelle, abbiamo, in generale, che, in qualunque riferimento, risulta

$$d\Phi = \frac{ds_1 ds_2}{16M^2 (2\pi)^3} \quad (3.910)$$

e. se sostituiamo questa espressione di $dLips$ nell'espressione completa del *rate* di decadimento e della sezione d'urto differenziale, abbiamo finalmente le espressioni

$$d\Gamma = \frac{1}{2J+1} \frac{1}{2E} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{ds_1 ds_2}{16 M^2 (2\pi)^3} \quad (3.911)$$

$$d\sigma = \frac{1}{2J_1+1} \frac{1}{2J_2+1} \frac{1}{4\sqrt{(P_{in1}P_{in2})^2 - M_{in1}^2 M_{in2}^2}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{ds_1 ds_2}{16 s (2\pi)^3} \quad (3.912)$$

L'importanza del risultato ottenuto sta nel fatto che, se si fa uno scatter plot degli eventi nelle variabili s_1 ed s_2 , lo spazio delle fasi fornisce un contributo uniforme in tutta la zona cinematicamente accessibile, quindi ogni addensamento di punti che si osservi in essa è dovuto alla dinamica del processo¹⁶⁰.

Lo scatter plot in questione si chiama¹⁶¹ *plot di Dalitz-Fabri*.

Per esempio, se le particelle B e C formano uno stato risonante di massa M^* , allora, nel plot di Dalitz, si osserverà un addensamento di eventi per $s_1 = (M^*)^2$!

Veniamo infine alla determinazione della zona cinematicamente accessibile del Dalitz plot. Abbiamo visto che

$$s_i = M^2 + m_i^2 - 2M E_i \quad (3.913)$$

dunque, essendo $E_i \geq m_i$, risulterà

$$s_i \leq M^2 + m_i^2 - 2M m_i = (M - m_i)^2 \quad (3.914)$$

D'altronde¹⁶², posto che (i, j, k) sia una permutazione pari di $(1, 2, 3)$, risulta

$$s_i = m_{jk} = (P - p_i)^2 = (p_j + p_k)^2 \geq (m_j + m_k)^2 \quad (3.915)$$

¹⁵⁹Naturalmente, dato che i tre invarianti sono linearmente dipendenti fra loro secondo la (3.903) una qualunque coppia (s_i, s_j) dei tre va altrettanto bene ...

¹⁶⁰Naturalmente stiamo qui assumendo una accettazione del rivelatore perfettamente uniforme: se questo non accade, allora anche l'accettazione può, ovviamente, selezionare eventi nello spazio delle fasi e quindi provocare disuniformità nel plot in questione.

¹⁶¹E. Fabri: *A study of tau-meson decay* Il Nuovo Cimento 11, 480 (1954)

R.H. Dalitz: *Decay of τ mesons of known charge* Phys. Rev 94, 1046 (1954)

¹⁶²Ricordiamo che la massa invariante del sistema di due particelle è definita come

$$m_{AB}^2 \equiv (p_A + p_B)^2$$

quindi abbiamo da soddisfare simultaneamente le tre disuguaglianze seguenti

$$(m_2 + m_3)^2 \leq s_1 \leq (M - m_1)^2 \quad (3.916)$$

$$(m_1 + m_3)^2 \leq s_2 \leq (M - m_2)^2 \quad (3.917)$$

$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_3 \leq (M - m_3)^2 \quad (3.918)$$

ed inoltre deve valere l'uguaglianza

$$s_1 + s_2 + s_3 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \equiv 3s_0 \quad (3.919)$$

Ne segue che, fissando arbitrariamente, per esempio, s_1 ed s_2 in modo che soddisfino, rispettivamente, la (3.916) e la (3.917), allora, ponendo

$$s_3 = 3s_0 - s_1 - s_2$$

se questa quantità soddisfa la disuguaglianza (3.918), la terna (s_1, s_2, s_3) così individuata verifica le condizioni (3.916)-(3.919) e questo equivale a dire che, nel CM, la terna delle energie E_1, E_2, E_3 soddisfa le condizioni

$$E_i \geq m_i; \quad \sum_{i=1}^3 E_i = M \quad (3.920)$$

Ma questo non significa ancora che la cinematica del decadimento sia rispettata, infatti, se è vero che, dalla (3.920) si possono definire i moduli degli impulsi spaziali delle tre particelle, attraverso le relazioni

$$p_i^2 = E_i^2 - m_i^2$$

e questi risulteranno sicuramente reali essendo $E_i \geq m_i$, non è affatto detto che questi valori di p_i possano essere tali che la loro somma vettoriale sia nulla. Affinchè questo accada, occorre e basta che i moduli p_1, p_2 e p_3 soddisfino la disuguaglianza triangolare, i.e., per esempio, siano tali che¹⁶³

$$p_1 + p_2 \geq p_3; \quad |p_1 - p_2| \leq p_3 \quad (3.921)$$

e nel sistema del CM, dove

$$p_A = (E_A, \vec{p}); \quad p_B = (E_B, -\vec{p})$$

si ha

$$m_{AB}^2 = (E_A + E_B)^2$$

e siccome $E_A \geq m_A, E_B \geq m_B$, segue che

$$m_{ab}^2 \geq (m_A + m_B)^2$$

¹⁶³E' un risultato di geometria che se la disuguaglianza triangolare vale nella forma della (3.921), allora vale per qualunque altra permutazione degli indici ...

e dunque

$$(p_1 + p_2)^2 \geq p_3^2 \quad \Leftrightarrow \quad p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \geq p_3^2 \quad (3.922)$$

$$|p_1 - p_2|^2 \leq p_3^2 \quad \Leftrightarrow \quad p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \leq p_3^2 \quad (3.923)$$

ovvero

$$-2p_1 p_2 \leq p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 \leq 2p_1 p_2 \quad \Leftrightarrow \quad |p_1^2 + p_2^2 - p_3^2| \leq 2p_1 p_2 \quad (3.924)$$

da cui, quadrando ancora, si ottiene

$$p_1^4 + p_2^4 + p_3^4 \leq 2(p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2) \quad (3.925)$$

D'altronde, per la (3.913), si ha

$$p_i^2 = E_i^2 - m_i^2 = \left(\frac{M^2 + m_i^2 - s_i}{2M} \right)^2 - m_i^2 \quad (3.926)$$

per cui, sostituendo la (3.926) nella (3.925), in termini solo di s_1 , s_2 e delle masse delle particelle, si ottiene, dopo aver moltiplicato per M^2 , che deve essere

$$\begin{aligned} & s_1 s_2^2 + s_1^2 s_2 - s_1 s_2 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + M^2) + \\ & + s_1 (m_2^2 m_3^2 - M^2 m_3^2 - m_1^2 m_2^2 + M^2 m_1^2) + \\ & + s_2 (m_1^2 m_3^2 - M^2 m_3^2 - m_1^2 m_2^2 + M^2 m_1^2) + \\ & + M^2 m_3^4 - m_1^2 m_2^2 m_3^2 - M^2 m_2^2 m_3^2 - M^2 m_1^2 m_3^2 + \\ & + M^4 m_3^2 + m_1 m_2^4 + m_1^4 m_2^4 - m_1^2 m_2^2 M^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (3.927)$$

Imponendo allora la condizione in questione, insieme a quella sui limiti per s_1 ed s_2 dati dalle (3.916) e (3.917), si ha infine la zona cinematicamente accessibile del plot di Dalitz.

Spesso poi, al posto delle variabili s_1 ed s_2 si usano variabili adimensionali¹⁶⁴, come, per esempio,

$$\begin{aligned} u &= \frac{s_1 + s_2}{2M^2} & s_1 &= M^2(u + v) \\ & & \Leftrightarrow & \\ v &= \frac{s_1 - s_2}{2M^2} & s_2 &= M^2(u - v) \end{aligned} \quad (3.928)$$

¹⁶⁴Si osservi che nelle variabili u, v definite dalla (3.928), l'elemento di spazio delle fasi, essendo

$$ds_1 ds_2 = 2M^4 du dv$$

risulta espresso da

$$d\Phi = \frac{2M^4 du dv}{16M^2(2\pi)^3} = \frac{M^2}{8(2\pi)^3} du dv$$

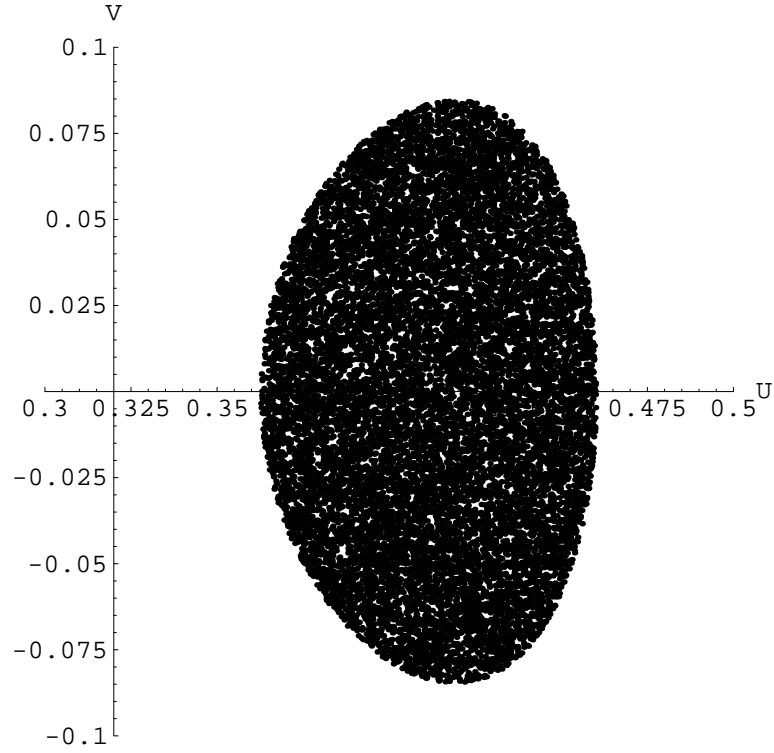


Figure 5: *Regione permessa nel Dalitz plot relativo al decadimento $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^+ \pi^-$.*

In questo caso, ponendo $\mu_i \equiv m_i/M$, la disuguaglianza (3.927) diviene

$$\begin{aligned}
& 2u^3 + v^2 - u^2 - 2uv^2 + u \left(\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1^2\mu_2^2 - 2\mu_3^2 + \mu_1^2\mu_3^2 + \mu_2^2\mu_3^2 \right) + \\
& + u^2 \left(-\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 \right) + v \left(\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_1^2\mu_3^2 + \mu_2^2\mu_3^2 \right) + v^2 \left(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 \right) \\
& - \mu_1^2\mu_2^2 + \mu_1^4\mu_2^2 + \mu_1^2\mu_2^4 + \mu_3^2 - \mu_1^2\mu_3^2 - \mu_2^2\mu_3^2 - \mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 + \mu_3^4 \leq 0 \quad (3.929)
\end{aligned}$$

La figura 5 mostra la regione accessibile nel Dalitz plot nelle variabili u, v sopradefinite, nel caso particolare in cui $\mu_i = \frac{139.57018}{493.677} = 0.2827$, che corrisponde al decadimento

$$K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^+ \pi^-$$

3.4.3 Lo spazio delle fasi di n particelle

Abbiamo visto che, nel caso di n particelle, risulta

$$d\Phi^{(n)} = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{i=1}^n p_i - P\right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad (3.930)$$

Questo elemento invariante dello spazio delle fasi può essere riscritto come prodotto di quello relativo a $(n-1)$ particelle per quello di due particelle, in modo da permettere una sua valutazione ricorsiva per qualunque n .

L'idea è che le n particelle dello stato finale considerato potranno essere raggruppate in un insieme di $(n-1)$ particelle, a cui aggiungere poi la n -esima. Considerando l'insieme di $(n-1)$ particelle come un unico soggetto (di quadrimpulso e massa invariante variabili ...), ecco che il sistema iniziale risulterà composto da due "particelle": una *vera*, mentre l'altra è *fittizia* e descrive l'insieme delle restanti $(n-1)$ particelle, la cui struttura interna sarà poi precisata da $\Phi^{(n-1)}$. Vediamo formalmente come questo accada.

Poniamo, per comodità di notazione

$$d\Phi^{(n)} = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{i=1}^n p_i - P\right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \equiv d\Phi^{(n)}(P; p_1, \dots, p_n) \quad (3.931)$$

e riscriviamolo, intanto, come segue

$$d\Phi^{(n)}(P; p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n - P) \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad (3.932)$$

Osserviamo quindi che, qualunque sia $m \geq 0$, vale la seguente identità

$$1 = \int_0^\infty \frac{d\mu^2}{2\pi} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2) (2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_m - q) \quad (3.933)$$

Facendo $m = n-1$ e sostituendo questa espressione nella (3.932), otteniamo

$$\begin{aligned} d\Phi^{(n)}(P; p_1, \dots, p_n) &= \\ &= \int \frac{d\mu^2}{2\pi} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_{n-1} - q) \\ &\quad (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_{n-1} + p_n - P) \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} = \\ &= \int \frac{d\mu^2}{2\pi} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2) \\ &\quad (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_{n-1} - q) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \\ &\quad (2\pi)^4 \delta^4(q + p_n - P) \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \end{aligned}$$

ma, come sappiamo, risulta

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2q^0}$$

e quindi, in definitiva, abbiamo

$$\begin{aligned} d\Phi^{(n)}(P; p_1, \dots, p_n) &= \int \frac{d\mu^2}{2\pi} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_{n-1} - q) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(q + p_n - P) \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2q^0} = \\ &= \int \frac{d\mu^2}{2\pi} d\Phi^{(2)}(P; p_n, q) d\Phi^{(n-1)}(q; p_1, \dots, p_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.934)$$

che è la formula di ricorrenza cercata.

Per quanto riguarda infine i limiti di integrazione in $d\mu^2$, si osservi che, essendo

$$q = p_1 + \dots + p_{n-1}$$

ne segue che

$$q^2 \equiv \mu^2 \geq m_1^2 + \dots + m_{n-1}^2$$

3.5 Applicazione allo scattering (quasi-)elastico

Consideriamo adesso in dettaglio il processo di scattering fra due particelle A e B (aventi masse M_A e M_B , quadrimpulsi k e p , negli stati di spin α e β , rispettivamente) che dà luogo a due particelle C e D (di masse M_C e M_D , quadrimpulsi k' e p' , negli stati di spin α' e β' , rispettivamente), che non coincidono, necessariamente, con quelle incidenti:

$$A(k; \alpha) + B(p; \beta) \rightarrow C(k'; \alpha') + D(p'; \beta') \quad (3.935)$$

Abbiamo già visto che questo processo è descritto dalla sezione d'urto differenziale invariante

$$d\sigma = \frac{1}{F} |\mathcal{M}|^2 d\Phi \quad (3.936)$$

dove, ricordiamolo ancora una volta

- F è il termine di flusso incidente, associato alla cinematica delle particelle A e B , dato da

$$F = 4\sqrt{(kp)^2 - M_A^2 M_B^2} \quad (3.937)$$

- $d\Phi$ è, per un assegnato impulso totale $P_{tot} \equiv k + p$, l'elemento di spazio delle fasi invariante di Lorentz, associato alle due particelle C e D , uscenti dall'interazione

$$d\Phi(k', p'; P_{tot}) = (2\pi)^4 \delta^4(k' + p' - P_{tot}) \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_D} \quad (3.938)$$

con $E_C = \sqrt{M_C^2 + |\vec{k}'|^2}$, $E_D = \sqrt{M_D^2 + |\vec{p}'|^2}$ le energie delle particelle C e D , rispettivamente.

- $|\mathcal{M}|^2$ è il modulo quadro dell'ampiezza di scattering invariante, relativa al processo in esame.

Se le due particelle incidenti non sono polarizzate, allora occorre evidentemente mediare sugli stati di spin iniziali, i.e. operare nella (3.936) la sostituzione

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \frac{1}{2S_A + 1} \frac{1}{2S_B + 1} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\alpha, \beta; \alpha', \beta')|^2 \quad (3.939)$$

mentre, se non osserviamo lo spin delle particelle emergenti, dobbiamo sommare sui possibili stati di spin finali, i.e. porre

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \sum_{\alpha', \beta'} |\mathcal{M}(\alpha, \beta; \alpha', \beta')|^2 \quad (3.940)$$

Perciò, se le particelle incidenti sono non polarizzate e non ci curiamo degli stati di spin finali, allora

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \frac{1}{2S_A + 1} \frac{1}{2S_B + 1} \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (3.941)$$

dove

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \equiv \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\alpha', \beta'} |\mathcal{M}(\alpha, \beta; \alpha', \beta')|^2 \quad (3.942)$$

Poiché $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ è un invariante relativistico, esso potrà essere funzione solo di invarianti costruiti, evidentemente, a partire dai quadrimpulsi delle particelle che partecipano al processo.

Insieme alla massa invariante quadra s del sistema che già conosciamo, definiamo ora anche gli altri due invarianti di Mandelstam t ed u , associati al processo di scattering considerato, ponendo

$$s = (k + p)^2 = M_A^2 + M_B^2 + 2(kp) = (k' + p')^2 = M_C^2 + M_D^2 + 2(k'p') \quad (3.943)$$

$$t = (k - k')^2 = M_A^2 + M_C^2 - 2(kk') = (p' - p)^2 = M_D^2 + M_B^2 - 2(pp') \quad (3.944)$$

$$u = (k - p')^2 = M_A^2 + M_D^2 - 2(kp') = (k' - p)^2 = M_C^2 + M_B^2 - 2(k'p) \quad (3.945)$$

Questo è quanto ci basta e gli invarianti così definiti sono, addirittura "troppi", infatti essi non sono fra loro indipendenti¹⁶⁵ e soddisfano l'equazione¹⁶⁶

$$s + t + u = M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2 \quad (3.954)$$

¹⁶⁵Il processo d'urto coinvolge quattro particelle, ma a causa della conservazione del quadrimpulso totale, solo tre quadrimpulsi sono indipendenti tra loro. Con tre quadrivettori possiamo costruire sei invarianti, ma quattro combinazioni di questi dovranno coincidere con le masse delle particelle date, per cui non potranno che esistere solo due scalari indipendenti (a parte le masse) costruiti con i quadrimpulsi delle particelle coinvolte nel processo.

¹⁶⁶Osserviamo che dalle definizioni (3.943)-(3.945) segue che, sommando membro a membro le sei equazioni, risulta

$$2s + 2t + 2u = 3 \left(\sum M^2 \right) + 2A \quad (3.946)$$

dove abbiamo posto

$$\left(\sum M^2 \right) \equiv M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2 \quad (3.947)$$

$$A \equiv (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) \quad (3.948)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} A &= (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) = \\ &= (kp) + (k'p') - k(k' + p') - p(k' + p') = (kp) + (k'p') - (k + p)(k' + p') = \\ &= (kp) + (k'p') - s \end{aligned} \quad (3.949)$$

$$\begin{aligned} A &= (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) = \\ &= -(kk') - (pp') + p(k - k') - p'(k - k') = -(kk') - (pp') - (k - k')(p' - p) = \\ &= -(kk') - (pp') - t \end{aligned} \quad (3.950)$$

$$\begin{aligned} A &= (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) = \\ &= -(kp') - (k'p) + p(k - p') - k'(k - p') = -(kp') - (k'p) - (k - p')(k' - p) = \\ &= -(kp') - (k'p) - u \end{aligned} \quad (3.951)$$

per cui, fissate le masse delle quattro particelle, in generale, sarà

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = |\overline{\mathcal{M}}|^2(s, t, u) \quad (3.955)$$

dove solo due invarianti sono realmente necessari.

Quanto poi al termine di flusso (3.937), ricavando (kp) dalla (3.943) in termini della variabile s , possiamo riscriverlo nel modo seguente

$$F = 2\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2} \quad (3.956)$$

ovvero, usando la (3.966) e quindi facendo intervenire il modulo a dell'impulso spaziale delle particelle iniziali nel CM

$$F = 4a\sqrt{s} \quad (3.957)$$

Per quanto riguarda poi l'elemento di spazio delle fasi invariante $d\Phi$, integrando la (3.938) in d^3p' e quindi in dk , come sappiamo dalla (3.845), si ottiene

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2} \delta^4(k' + p' - p_{tot}) \frac{d^3k'}{E_C} \frac{d^3p'}{E_D} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2s} d\Omega_{CM} \end{aligned} \quad (3.958)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{\sqrt{s}} d\Omega_{CM} \quad (3.959)$$

dove

- $d\Omega_{CM}$ è l'elemento di angolo solido associato nel CM ad una qualsiasi delle due particelle uscenti;
- la quantità¹⁶⁷

$$b \equiv \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2\sqrt{s}} = |\vec{p}_{CM}| = |\vec{k}_{CM}| \quad (3.961)$$

è il modulo dell'impulso spaziale sia della particella C che D , così come appare nel riferimento del CM .

Dunque, sommando, otteniamo

$$3A = A - (s + t + u) \Rightarrow 2A = -(s + t + u) \quad (3.952)$$

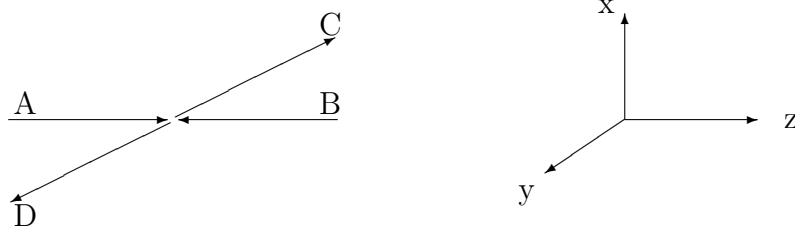
e quindi, sostituendo nella (3.946), si ha appunto che

$$(s + t + u) = \left(\sum M^2\right) \equiv M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2 \quad (3.953)$$

¹⁶⁷Osserviamo ancora una volta che quest'ultima quantità è definita solo se

$$(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2 \geq 0 \Leftrightarrow s \geq (M_C + M_D)^2 \quad (3.960)$$

i.e., se ci troviamo sopra soglia di produzione ...!



Se il sistema¹⁶⁸ del CM è scelto in accordo con la figura sopra riportata e lo scattering è simmetrico attorno all'asse z , (per esempio, perchè le particelle incidenti A e B sono non polarizzate...), allora

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi} \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{s} d(-\cos\theta_{CM}) \quad (3.969)$$

¹⁶⁸Allorchè trattammo la cinematica dell'urto anelastico fra due particelle A e B , di massa M_A ed M_B , che danno luogo a due particelle C e D , di massa M_C ed M_D , vedemmo che, nel sistema del CM , se allineiamo gli assi in modo che A si propaghi lungo la direzione dell'asse polare z , abbiamo

$$A : \quad k = (\sqrt{M_A^2 + a^2}, 0, 0, a) \quad (3.962)$$

$$B : \quad p = (\sqrt{M_B^2 + a^2}, 0, 0, -a) \quad (3.963)$$

$$C : \quad k' = (\sqrt{M_C^2 + b^2}, b \sin\theta, 0, b \cos\theta) \quad (3.964)$$

$$D : \quad p' = (\sqrt{M_D^2 + b^2}, -b \sin\theta, 0, -b \cos\theta) \quad (3.965)$$

dove a , b sono, rispettivamente, i moduli degli impulsi lineari delle due coppie (A,B) e (C,D) , legati alla variabile di Mandelstam s (massa invariante quadra del sistema) dalle relazioni

$$a = \frac{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2\sqrt{s}}; \quad b = \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2\sqrt{s}} \quad (3.966)$$

per cui possiamo anche scrivere

$$E_A = \sqrt{M_A^2 + a^2} = \frac{s + M_A^2 - M_B^2}{2\sqrt{s}}; \quad E_B = \sqrt{M_B^2 + a^2} = \frac{s + M_B^2 - M_A^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.967)$$

$$E_C = \sqrt{M_C^2 + b^2} = \frac{s + M_C^2 - M_D^2}{2\sqrt{s}}; \quad E_D = \sqrt{M_D^2 + b^2} = \frac{s + M_D^2 - M_C^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.968)$$

Perciò, usando questo risultato nella equazione (3.936), insieme con l'espressione del flusso incidente dato dalla equazione (3.956), otteniamo infine

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}} |\mathcal{M}|^2 d(-\cos\theta_{CM}) \quad (3.970)$$

i.e.

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{b}{a} |\mathcal{M}|^2 d(-\cos\theta_{CM}) \quad (3.971)$$

la quale, nel caso di scattering elastico (le particelle nello stato finale coincidono con quelle nello stato iniziale) si semplifica, evidentemente, in

$$d\sigma|_{el} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi s} d(-\cos\theta_{CM}) \quad (3.972)$$

Invece dell'angolo di scattering $\cos\theta_{CM}$, talvolta è più conveniente usare altre variabili, come, per esempio, la variabile adimensionale¹⁶⁹ y definita nella nota riportata sotto, attraverso l'equazione (3.974), in termini del momento trasferito

$$q \equiv k - k' = p - p' \quad (3.983)$$

Abbiamo dimostrato [cfr. (3.978)] che la variabile y può essere scritta come

$$y = \mathcal{A} - \mathcal{B} \cos\theta_{CM} \quad (3.984)$$

¹⁶⁹Definiamo la variabile adimensionale y in termini del quadrimpulso trasferito

$$q \equiv k - k' \quad (3.973)$$

dalla particella A a B , nel modo seguente

$$y \equiv \frac{pq}{pk} = 1 - \frac{pk'}{pk} = 1 - \frac{2pk'}{2pk} \quad (3.974)$$

Ma, dalle equazioni (3.963), (3.964) e dalle equazioni (3.967), (3.968), si ha

$$2pk' = 2\sqrt{M_C^2 + b^2}\sqrt{M_B^2 + a^2} + 2ab \cos\theta_{CM} \quad (3.975)$$

$$= 2 \frac{s + M_C^2 - M_D^2}{2\sqrt{s}} \frac{s + M_B^2 - M_A^2}{2\sqrt{s}} + 2ab \cos\theta_{CM} \quad (3.976)$$

mentre, dalla definizione stessa di s in termini dei quadrimpulsi di A e B , risulta

$$2pk = s - M_A^2 - M_B^2 \quad (3.977)$$

dove [cfr.(3.979), (3.980)]

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s + M_C^2 - M_D^2)(s + M_B^2 - M_A^2)}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \quad (3.985)$$

$$(3.986)$$

$$\mathcal{B} = \frac{2ab}{s - M_A^2 - M_B^2} = \quad (3.987)$$

$$= \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2} \sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \quad (3.988)$$

Perciò, per una energia totale fissata nel CM $\sqrt{s} = \mathcal{E}_{CM}$, abbiamo

$$dy = \mathcal{B} d(-\cos\theta_{CM}) \quad (3.989)$$

e dunque, ripartendo dalla relazione (3.971)

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{b}{a} \overline{|\mathcal{M}|^2} d(-\cos\theta_{CM}) \quad (3.990)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{b}{a} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{dy}{\mathcal{B}} = \\ &= \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{b}{a} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{s - M_A^2 - M_B^2}{2ab} dy \end{aligned}$$

Perciò, sostituendo nella equazione (3.974), otteniamo infine

$$y = \mathcal{A} - \mathcal{B} \cos\theta_{CM} \quad (3.978)$$

dove

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s + M_C^2 - M_D^2)(s + M_B^2 - M_A^2)}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \quad (3.979)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{2ab}{2pk} = \\ &= \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2} \sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \end{aligned} \quad (3.980)$$

da cui, evidentemente, per s fissato, risulta

$$d(-\cos\theta_{CM}) = \frac{dy}{\mathcal{B}} \quad (3.981)$$

e quindi, in termini della variabile y ,

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi} \frac{s - M_A^2 - M_B^2}{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}} dy \quad (3.982)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{2a^2} \frac{s - M_A^2 - M_B^2}{2a^2} \quad (3.991)$$

ovvero, finalmente

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{16\pi} \frac{s - M_A^2 - M_B^2}{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (3.992)$$

con¹⁷⁰

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} \leq y \leq \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad (3.1001)$$

¹⁷⁰Si osservi che nel limite di alta energia, i.e. quando $s \gg M^2$, risulta comunque che

$$\mathcal{A} \rightarrow \frac{1}{2}; \quad \mathcal{B} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (3.993)$$

per cui i limiti di integrazione in dy diventano, rispettivamente, 0 ed 1.

Se accade che $M_A = 0$, ci sono poi alcune semplificazioni.

Quanto alla sezione d'urto differenziale, risulta evidentemente

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{16\pi} \frac{1}{(s - M_B^2)} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (3.994)$$

con

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s + M_C^2 - M_D^2)(s + M_B^2)}{2s(s - M_B^2)} \quad (3.995)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2s} \quad (3.996)$$

le quali, nel caso in cui possa essere trascurata anche la massa M_C , diventano

$$\mathcal{A} \rightarrow 1 - \frac{(s - M_D^2)(s + M_B^2)}{2s(s - M_B^2)} \quad (3.997)$$

$$\mathcal{B} \rightarrow \frac{s - M_D^2}{2s} \quad (3.998)$$

per cui ne risulta che, quanto agli estremi di integrazione, è

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} \rightarrow 1 - \frac{s - M_D^2}{s - M_B^2} \quad (3.999)$$

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow 1 + \frac{s - M_D^2}{s - M_B^2} \frac{M_B^2}{s} \quad (3.1000)$$

Un'altra variabile talvolta utile per esprimere la sezione d'urto differenziale fra due particelle, è l'invariante Q^2 , definito¹⁷¹ come

$$Q^2 \equiv -(q \cdot q) \equiv -(k - k')^2 = -t \quad (3.1009)$$

Dalla equazione (3.1006), abbiamo

$$Q^2 = Q_0^2 - (s - M_A^2 - M_B^2) \mathcal{B} \cos\theta_{CM} \quad (3.1010)$$

dove Q_0^2 è dato dalla (cfr (3.1005))

$$Q_0^2 = \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)(s + M_C^2 - M_D^2) - 2s(M_A^2 + M_C^2)}{2s} \quad (3.1011)$$

¹⁷¹Questa variabile è definita come

$$Q^2 \equiv -q^2 \equiv -t = -(k - k')^\mu (k - k')_\mu = -M_A^2 - M_C^2 + 2(kk') \quad (3.1002)$$

Dalla (3.962) e (3.964), abbiamo

$$2(kk') = 2\sqrt{M_A^2 + a^2}\sqrt{M_C^2 + b^2} - 2ab \cos\theta_{CM} \quad (3.1003)$$

i.e.

$$\begin{aligned} Q^2 &= -M_A^2 - M_C^2 + 2 \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)}{2\sqrt{s}} \frac{(s + M_C^2 - M_D^2)}{2\sqrt{s}} - 2ab \cos\theta_{CM} \\ &= \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)(s + M_C^2 - M_D^2) - 2s(M_A^2 + M_C^2)}{2s} - 2ab \cos\theta_{CM} \end{aligned} \quad (3.1004)$$

Se definiamo allora la quantità costante (fissato s)

$$Q_0^2 \equiv \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)(s + M_C^2 - M_D^2) - 2s(M_A^2 + M_C^2)}{2s} \quad (3.1005)$$

ed esprimiamo $2ab$ in termini di \mathcal{B} , usando l'equazione (3.980) e l'espressione di $2(pk)$ come data dalla (3.977), otteniamo

$$2ab = 2(pk) \mathcal{B} = (s - M_A^2 - M_B^2) \mathcal{B}$$

per cui, finalmente, otteniamo

$$Q^2 = Q_0^2 - (s - M_A^2 - M_B^2) \mathcal{B} \cos\theta_{CM} \quad (3.1006)$$

e dunque, di nuovo, ad s fissato

$$dQ^2 = (s - M_A^2 - M_B^2) \mathcal{B} d(-\cos\theta_{CM}) \equiv (s - M_A^2 - M_B^2) dy \quad (3.1007)$$

per cui, dalla (3.982), risulta

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}} dQ^2 \quad (3.1008)$$

e \mathcal{B} è dato dalla (3.988).

Se l'energia $\mathcal{E} = \sqrt{s}$ nel CM è fissata, allora

$$dQ^2 = -\mathcal{B}(s - M_A^2 - M_B^2) d(\cos\theta_{CM}) = (s - M_A^2 - M_B^2) dy \quad (3.1012)$$

e perciò, dalla (3.991), finalmente si ha

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi [(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2]} \quad (3.1013)$$

dove

$$Q_0^2 - \mathcal{B}(s - M_A^2 - M_B^2) \leq Q^2 \leq Q_0^2 + \mathcal{B}(s - M_A^2 - M_B^2) \quad (3.1014)$$

Di nuovo, nel caso poi in cui le particelle incidenti siano non polarizzate e non si osservi lo stato di spin delle particelle prodotte, risulta

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \frac{1}{16\pi} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{1}{[(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2]} \quad (3.1015)$$

3.5.1 Lo spin del pione π^+

Oggi sappiamo che i tre pioni sono costituiti da una coppia quark/antiquark della prima generazione (i.e. *up* e *down*), ed in particolare che risulta

$$|\pi^+ \rangle = |u\bar{d} \rangle, \quad |\pi^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u} \rangle - |d\bar{d} \rangle), \quad |\pi^- \rangle = |d\bar{u} \rangle \quad (3.1016)$$

Il quark e l'antiquark, che hanno entrambi spin $S = 1/2$, sono legati in uno stato di singoletto di spin ed hanno momento angolare orbitale relativo $L = 0$, per cui i pioni hanno, a loro volta, spin nullo¹⁷².

Questo era un fatto messo in evidenza sperimentalmente ben prima che si arrivasse a capire la loro struttura in termini di quarks. Per questo, si era usato il metodo¹⁷³ del confronto fra la sezione d'urto del processo

$$p + p \rightarrow \pi^+ + d \quad (3.1017)$$

con quella del processo inverso

$$\pi^+ + d \rightarrow p + p \quad (3.1018)$$

In entrambi i casi si tratta di un processo di scattering quasi-elastico e, come abbiamo visto, la sezione d'urto differenziale di un generico processo di questo tipo, nel caso in cui lo stato iniziale *non abbia* spin definito e lo spin delle particelle nello stato finale *non venga* osservato, in base alla (3.834), tenendo conto della (3.957), può essere scritta nel modo seguente

$$d\sigma_{\rightarrow} = \frac{1}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)} \frac{1}{4\sqrt{s}a} \overline{|\mathcal{M}_{\rightarrow}|^2} d\Phi \quad (3.1019)$$

dove

- \sqrt{s} è la massa invariante del sistema delle due particelle;
- a indica, nel sistema del CM , il modulo dell'impulso di entrambe le particelle incidenti;
- S_a e S_b sono gli spin delle due particelle che collidono;

¹⁷²Chiaramente lo spin nullo dei pioni, dalla legge di composizione del momento angolare, potrebbe ottenersi anche se i due costituenti fossero legati in uno stato di tripletto di spin ed in onda P , cioè con momento angolare relativo $L = 1$.

Questa possibilità è esclusa, però, dalla parità intrinseca del pione, che, come abbiamo visto almeno nel caso del π^0 , risulta essere negativa (il pione è una particella pseudoscalare ...): poiché esso è costituito da una coppia particella/antiparticella di Dirac, esso ha comunque parità intrinseca pari a $(-1) \cdot (-1)^L$ e quindi L deve essere pari.

¹⁷³Cfr., per esempio, H. Muirhead: *The Physics of elementary Particles*, Pergamon Press 1965, pag. 26.

- $|\overline{\mathcal{M}_{\rightarrow}}|^2$ è la somma dei moduli quadri delle ampiezze invarianti di scattering, relative al processo (3.1017), che chiameremo *diretto*¹⁷⁴, sommate su tutti gli stati di spin iniziali e finali;
- $d\Phi$ sta per l'elemento di spazio delle fasi Lorentz-invariante, relativo allo stato finale considerato.

Nel centro di massa, per due particelle, l'elemento dello spazio delle fasi, abbiamo visto che può essere scritto come

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}}{2s} d\Omega_{CM} \equiv \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{\sqrt{s}} d\Omega_{CM} \quad (3.1022)$$

dove m ed M sono le masse delle due particelle prodotte nello stato finale e b indica, al solito, il modulo del loro impulso spaziale. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} d\sigma_{\rightarrow} &= \frac{1}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)} \frac{1}{4\sqrt{s}a} |\overline{\mathcal{M}_{\rightarrow}}|^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{\sqrt{s}} d\Omega_{CM} = \\ &= \frac{1}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)} \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{b}{a} |\overline{\mathcal{M}_{\rightarrow}}|^2 d\Omega_{CM} \end{aligned} \quad (3.1023)$$

Poiché le interazioni forti sono invarianti per *time reversal*, nel caso del processo considerato, che avviene, appunto, via interazione forte, poiché la matrice S soddisfa quindi la relazione $T S T^{-1} = S^\dagger$, il modulo quadro degli elementi di matrice per i due decadimenti, *diretto* e *inverso*, sono uguali, per cui abbiamo

$$|\overline{\mathcal{M}_{\rightarrow}}|^2 = |\overline{\mathcal{M}_{\leftarrow}}|^2 \quad (3.1024)$$

quindi, ponendo adesso, per maggior chiarezza

$$a \equiv p_p; \quad b \equiv p_\pi \quad (3.1025)$$

dal confronto delle due sezioni d'urto differenziali valutate per lo stesso valore di energia totale nel CM (i.e., per lo stesso valore di \sqrt{s}), usando il fatto che lo spin

¹⁷⁴Una espressione del tutto analoga vale, evidentemente, per il processo inverso, cioè per la reazione

$$\pi^+ + d \rightarrow p + p \quad (3.1020)$$

per la quale, con ovvio significato di simboli, avremo

$$d\sigma_{\leftarrow} = \frac{1}{(2S_c + 1)(2S_d + 1)} \frac{1}{4\sqrt{s}b} |\overline{\mathcal{M}_{\leftarrow}}|^2 d\Phi \quad (3.1021)$$

avendo adesso indicato con b il modulo dell'impulso nel CM delle particelle incidenti nel processo inverso e con $d\Phi$, analogamente, l'elemento di spazio delle fasi associato alle particelle nello stato finale del processo inverso.

del protone vale $1/2$, mentre quello del deutone, come è noto, vale 1 e tenendo conto infine che lo stato finale, nel caso della reazione "inversa", è fatto da due particelle identiche, che dimezza lo spazio delle fasi (l'integrazione avviene su 2π e non su $4\pi \dots$), risulta

$$\frac{d\sigma_{\rightarrow}}{d\sigma_{\leftarrow}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{p_{\pi}}{p_p}}{\frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot (2S+1)} \frac{p_p}{p_{\pi}}} = \frac{3(2S+1)}{2} \frac{p_{\pi}^2}{p_p^2} = \frac{\sigma_{\rightarrow}}{\sigma_{\leftarrow}} \quad (3.1026)$$

dove S è appunto lo spin ignoto del π^+ .

La misura della sezione d'urto del processo diretto fu effettuata da Cartwright¹⁷⁵ e collaboratori nel 1953, ottenendo, per un protone incidente su un bersaglio di idrogeno con energia¹⁷⁶, nel laboratorio, pari a 341 MeV , il valore di

$$\sigma_{\rightarrow} = (1.8 \pm 0.6) \times 10^{-28} \text{ cm}^2$$

Da questo conclusero che il processo inverso, valutato per lo stesso valore di massa invariante del sistema, avrebbe dovuto avere una sezione d'urto di

$$\sigma_{\leftarrow} = (3.0 \pm 1.0) \times 10^{-27} \text{ cm}^2$$

¹⁷⁵W.F. Cartwright, C. Richman, M.N. Whitehead, H.A. Wilson: *The production of positive pions by 341-MeV protons on protons* Phys. Rev. 91, 677, (1953)

¹⁷⁶Si osservi che, essendo la massa del deutone pari a $M_d = 1875.6 \text{ MeV}$, quella del protone è $M_p = 938.3 \text{ MeV}$ e quella del pione carico pari a $m_{\pi} = 139.6 \text{ MeV}$, la soglia della reazione $p + p \rightarrow \pi^+ + d$ si raggiunge per un'energia del protone incidente su bersaglio fisso, pari a

$$2M_p^2 + 2M_p E = (M_d + m_{\pi})^2 \Rightarrow E = \frac{(M_d + m_{\pi})^2 - 2M_p^2}{2M_p} = 1225.7 \text{ MeV}$$

ovvero per un'energia cinetica del protone pari a $T_s = 287.4 \text{ MeV}$.

L'esperimento di Cartwright operava quindi a poco più di 50 MeV sopra la soglia, ad una energia cinetica dei protoni pari a $T_0 = 341 \text{ MeV}$, ovvero ad una massa invariante pari a

$$\sqrt{s} = \sqrt{2M_p(M_p + E)} = \sqrt{2M_p(2M_p + T_0)} = 2040.0 \text{ MeV}$$

a cui corrisponde un impulso del protone nel sistema del CM che è pari a

$$p_p = \frac{\sqrt{(s - 2M_p^2)^2 - 4M_p^4}}{2\sqrt{s}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^2 - M_p^2} = 400 \text{ MeV}/c$$

Circa la reazione inversa $d + \pi^+ \rightarrow p + p$, allo stesso valore di massa invariante, corrisponde un'energia del pione carico su deutone fermo che è pari a

$$s = m_{\pi}^2 + M_d^2 + 2E_{\pi} M_d \Rightarrow E_{\pi} = \frac{s - m_{\pi}^2 - M_d^2}{2M_d} = 166.4 \text{ MeV}$$

se lo spin del pione fosse stato nullo¹⁷⁷, oppure 1/3 di quel valore, in accordo con la (3.1026), nel caso fosse stato pari a 1, etc ...

Il confronto con le misure di assorbimento di pioni positivi in deuterio¹⁷⁸ già effettuate, propendeva decisamente verso un valore nullo dello spin del π^+ .

Questo risultato fu definitivamente stabilito nel 1957 da Cohen¹⁷⁹ e collaboratori, i quali, sulla base dei risultati sperimentali sin lì accumulati, poterono concludere che

$$(2S_\pi + 1) = 1 \pm 0.1 \quad (3.1027)$$

corrispondente ad una energia cinetica nel sistema del laboratorio pari a $T_\pi = E_\pi - m_\pi = 26.8 \text{ MeV}$ ed ad un impulso nel sistema del CM di

$$p_\pi = \frac{\sqrt{(s - m_\pi^2 - M_d^2)^2 - 4m_\pi^2 M_d^2}}{2\sqrt{s}} = 83.3 \text{ MeV}/c$$

per cui il fattore cinematico (per $S_\pi = 0$) fra le due sezioni d'urto valeva

$$\frac{\sigma_{\leftarrow}}{\sigma_{\rightarrow}} = \frac{2}{3} \left(\frac{p_p}{p_\pi} \right)^2 = 15.4$$

Al tempo dell'esperimento, le masse non erano note con tutta la precisione con cui le conosciamo oggi, e questo fattore fu valutato essere pari a 16.7, da cui fu estrapolato il valore di $\sigma_{\leftarrow} = (3.0 \pm 1.0) \times 10^{-27} \text{ cm}^2$ a partire dalla misura di $\sigma_{\rightarrow} = (1.8 \pm 0.6) \times 10^{-28} \text{ cm}^2$.

¹⁷⁷L'esistenza stessa della reazione implicava, evidentemente, che lo spin del pione fosse comunque intero ...

¹⁷⁸D.L. Clark, A. Roberts, R. Wilson: *Cross section for the reaction $\pi^+ + d \rightarrow p + p$ and the spin of the π^+ meson* Phys. Rev. 83, 649 (1951)

D.L. Clark, A. Roberts, R. Wilson: *Disintegration of the deuteron by π^+ mesons and the spin of the π^+ meson* Phys. Rev. 85, 523 (1952); i quali avevano misurato $\sigma = (4.5 \pm 0.8) \times 10^{-27} \text{ cm}^2$.

R. Durbin, H. Loar, J. Steinberger: *The absorption of pions by deuterons*

Phys. Rev. 84, 581 (1951); i quali avevano misurato $\sigma = (3.1 \pm 0.3) \times 10^{-27} \text{ cm}^2$.

¹⁷⁹E.R. Cohen, K.M. Crowe, J.M. Dumond: *Fundamental constants of physics* Interscience Publisher, New York, 1957

3.5.2 Lo scattering quasi-elastico $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$

In questo paragrafo ci occuperemo dello scattering quasi-elastico di antineutrino perché, come è noto, fu attraverso questo processo che fu rivelata per la prima

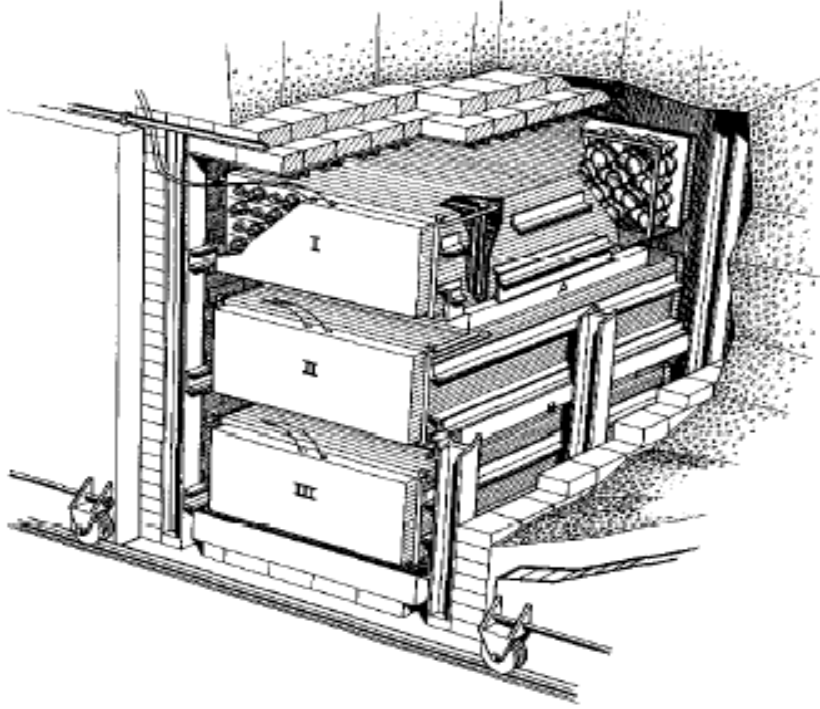


Figure 6: *Apparato sperimentale usato da Cowan e Reines*

volta, l'esistenza di questa particella.

L'esperimento che portò alla prima osservazione sperimentale diretta del neutrino (in realtà, dell'antineutrino ...) fu quello di Cowan e Reines, che si concluse¹⁸⁰ nel 1953. La difficoltà della misura richiese ben 7 anni per il suo compimento. Cowan e Reines osservarono la reazione beta-inversa¹⁸¹

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+ \quad (3.1028)$$

¹⁸⁰F. Reines, C.L. Cowan jr: *A proposed experiment to detect the free neutrino*, Phys. Rev. 90, 492 (1953)

F. Reines, C.L. Cowan jr: *Detection of free neutrino*, Phys. Rev. 92, 830 (1953)

F. Reines, C.L. Cowan jr, F.B. Harrison, A.D. McGuire, H.W. Kruse:

Detection of free antineutrino, Phys. Rev. 117, 159 (1960)

¹⁸¹Quanto vale l'energia di soglia che deva avere il neutrino affinché la reazione possa avvenire?

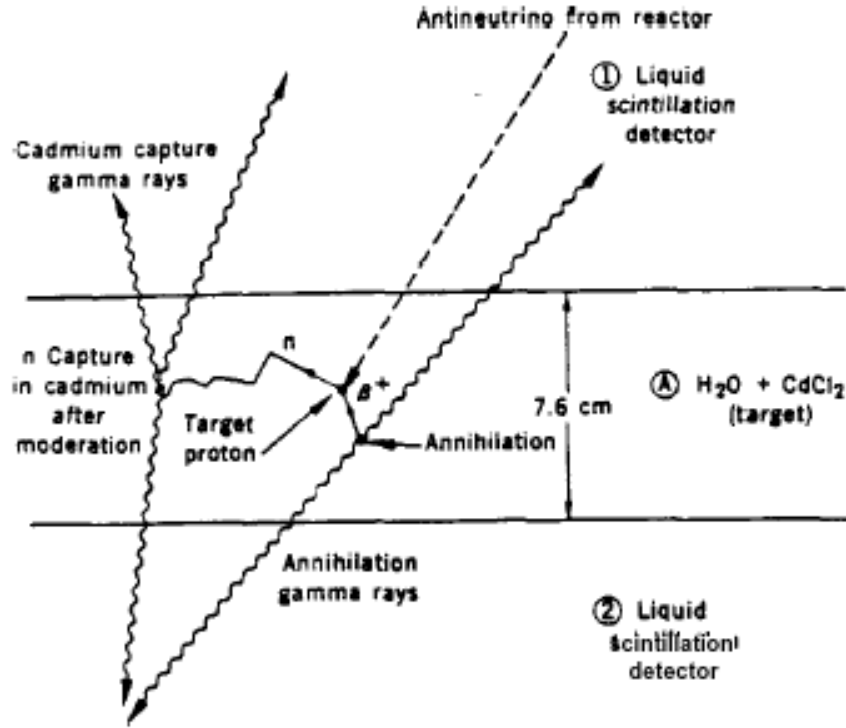


Figure 7: *Principio di funzionamento dell'esperimento di Cowan e Reines*

presso la centrale nucleare di Savannah River, negli USA, in grado di fornire un flusso¹⁸² di ben $10^{13} \bar{\nu}/cm^2 \cdot s$ sul bersaglio, costituito da 200 litri di acqua in cui erano disciolti 40 Kg di cloruro di cadmio ($CdCl_2$). Il segnale era costituito dall'osservazione dei due gamma da 0.511 MeV di annichilazione del positrone,

¹⁸²In un processo di fissione neutronica del nucleo ^{235}U , si ottengono tipicamente due nuclei ricchi di neutroni ed un paio di neutroni che consentono la prosecuzione della reazione a catena (per es. $^{235}U + n \rightarrow ^{140}Xe + ^{94}Sr + 2n$). I prodotti di fissione danno luogo a decadimenti β di corta vita media (ms), a cascata. In media si hanno circa 6 $\bar{\nu}_e$ di varia energia per ogni fissione, ed un totale di circa 200 MeV di energia prodotta. Dunque, il numero di antineutrini emessi dal reattore, per secondo, vale

$$N_{\bar{\nu}} \approx 6 N_{fis} = \frac{6 P_{th}}{2 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19}}$$

dove P_{th} è la sua potenza termica. Assumendo $P_{th} \approx 3 GW$, ne segue che, nell'intero angolo solido, vengono emessi dell'ordine di $\frac{6 \times 3 \cdot 10^9}{3.2 \cdot 10^{-11}} = 5.6 \cdot 10^{20}$ antineutrini per secondo. Ad una distanza di 20 m dal reattore, il loro flusso $F_{\bar{\nu}}$ vale quindi

$$F_{\bar{\nu}} = \frac{5.6 \cdot 10^{20}}{4\pi(2000)^2} \approx 1.1 \cdot 10^{13} \bar{\nu}/(cm^2 \cdot s)$$

osservati in coincidenza ritardata (circa $30 \mu sec$) con i gamma emessi dal nucleo di Cadmio che cattura il neutrone.

Il rivelatore era costituito da 1400 litri di scintillatore liquido disposto intorno al bersaglio, visto da circa un centinaio di fotomoltiplicatori.

Reines e Cowan osservarono che la differenza di conteggi "reattore on" - "reattore off" era di 3 ± 0.2 conteggi all'ora, in sostanziale accordo con la previsione.

Da questo essi estrassero una sezione d'urto totale pari a

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{exp} = 12_{-4}^{+7} \cdot 10^{-44} cm^2 \quad (3.1029)$$

Vediamo adesso di calcolarla !

Tratteremo la reazione di scattering quasi-elastico

$$\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n \quad (3.1030)$$

nell'assunzione che protone e neutrone possano essere considerati come particelle di Dirac senza struttura.

Data la bassa energia¹⁸³ del neutrino e quindi il basso momento trasferito, la teoria di Fermi è ampiamente sufficiente per descrivere il processo in questione.

Nell'ambito della Teoria di Fermi (corretta per la violazione di parità), il termine della Lagrangiana di interazione che descrive il processo di scattering (3.1030) è il seguente

$$\mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_{(had)}^\mu(x) J_\mu^{\dagger(lept)}(x) \quad (3.1031)$$

dove, con ovvio significato di simboli, si è posto

$$J_\mu^{(lept)}(x) = \bar{\psi}_l(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(x) \quad (3.1032)$$

mentre per la parte adronica, nell'assunzione che si possano appunto trattare sia il protone che il neutrone come particelle di Dirac senza struttura, analogamente abbiamo

$$J_{(had)}^\mu(x) = \bar{\psi}_n(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_p(x) \quad (3.1033)$$

La sezione d'urto in un generico processo quasi-elastico, come si è visto precedentemente, nell'ipotesi di non osservare gli stati di spin, è data dalla relazione

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \frac{1}{F} \overline{|\mathcal{M}|^2} d\phi \quad (3.1034)$$

¹⁸³Il limite di applicabilità della Teoria di Fermi, come è noto, si raggiunge quando il momento trasferito della reazione diventa confrontabile con la massa del bosono W .

dove

- S_i sono gli spin delle particelle nello stato iniziale;
- F è il termine di flusso, legato alla massa invariante \sqrt{s} del sistema ed alle due masse delle particelle nello stato iniziale $M_A \equiv m_\nu$ e $M_B \equiv M_p$ dalla ben nota relazione

$$F = 2\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2} \quad (3.1035)$$

che, nel nostro caso in cui la massa dell'anti-neutrino sia considerata nulla, diviene

$$F \rightarrow 2(s - M_p^2) \quad (3.1036)$$

- $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ è la somma sugli stati di spin iniziali e finali dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti della reazione;
- $d\Phi$ è lo spazio delle fasi invariante che, come ben sappiamo, nel sistema del CM , è dato da

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2s} d\Omega_{CM} = \\ &\rightarrow \frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{2s} (-d\cos\theta) \end{aligned} \quad (3.1037)$$

essendo $\theta \equiv \theta_{CM}$ l'angolo nel CM fra la direzione dell'antineutrino incidente e quella del positrone uscente.

Tenendo quindi conto che di stati di spin per l'antineutrino ne esiste uno solo, abbiamo

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{2} \frac{1}{2(s - M_p^2)} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{2s} (-d\cos\theta) = \\ &= \frac{1}{64\pi} \frac{1}{s(s - M_p^2)} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2} (-d\cos\theta) \end{aligned} \quad (3.1038)$$

Passiamo dunque a valutare la somma sugli stati di spin dei moduli quadri dell'elemento di matrice.

Nella stessa convenzione usata per trattare in generale l'urto anelastico, scriviamo

$$\bar{\nu}(Q, b) + p(P, r) \rightarrow e^+(q, a) + n(p, s) \quad (3.1039)$$

ovvero indichiamo, rispettivamente, con $(p, s), (P, r)$ l'impulso e lo spin per il neutrone ed il protone, e con $(q, a), (Q, b)$ quelli del positrone e dell'antineutrino. Al primo ordine, risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \langle out | \mathcal{L}(0) | in \rangle = \\ &= \langle n(p, s) | J_{had}^\mu(0) | p(P, r) \rangle \langle e^+(q, a) | J_\mu^{\dagger(lept)}(0) | \bar{\nu}(Q, b) \rangle \quad (3.1040)\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle n(p, s) | \bar{\psi}_n(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_p(0) | p(P, r) \rangle \cdot \\ &\quad \cdot \langle e^+(q, a) | \bar{\psi}_\nu(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_e(0) | \bar{\nu}(Q, b) \rangle = \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle n(p, s) | \bar{\psi}_n(0) | \Omega \rangle \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \langle \Omega | \psi_p(0) | p(P, r) \rangle \cdot \\ &\quad \cdot \langle \Omega | \bar{\psi}_\nu(0) | \bar{\nu}(Q, b) \rangle \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \langle e^+(q, a) | \psi_e(0) | \Omega \rangle = \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right) \cdot \left(\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right) \quad (3.1041)\end{aligned}$$

da cui, evidentemente,

$$\begin{aligned}|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \sum_{a,b,r,s} \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right] \cdot \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right] \\ &\quad \times \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right]^* \cdot \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right]^* \equiv \\ &\equiv \frac{G_F^2}{2} L_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta} \quad (3.1042)\end{aligned}$$

dove abbiamo definito i due tensori leptónico e adronico $L_{\alpha\beta}$ e $W^{\alpha\beta}$ nel modo seguente¹⁸⁴

$$L_{\alpha\beta} \equiv \sum_{a,b} \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right] \cdot \left[\bar{\nu}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \right]^* \quad (3.1043)$$

$$W^{\alpha\beta} \equiv \sum_{r,s} \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right] \left[\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P) \right]^* \quad (3.1044)$$

Iniziamo dunque calcolando il tensore leptónico.

Siccome, come si è già osservato, ogni elemento del tensore è un numero complesso e così pure ogni quantità entro parentesi quadra nella (3.1043), ne segue che ciascuna di queste quantità complesse può essere vista anche come l'unico elemento di una matrice 1×1 , ovvero essa coincide con la traccia della matrice stessa.

Quanto poi alla coniugazione complessa di una tale quantità, essa può anche essere vista come la coniugazione hermitiana della matrice 1×1 corrispondente,

¹⁸⁴Si osservi che ciascun termine entro parentesi quadra è un c-numero !

per cui possiamo scrivere, in definitiva, che

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &\equiv Tr \left\{ \sum_{a,b} [\bar{v}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q)] \cdot [\bar{v}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\beta (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q)]^\dagger \right\} = \\
&= Tr \left\{ \sum_{a,b} \bar{v}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \cdot v_e^{\dagger(a)}(q) (1 - \gamma_5^\dagger) \gamma_\beta^\dagger \bar{v}_\nu^{\dagger(b)}(Q) \right\} \quad (3.1045)
\end{aligned}$$

ma, come ben sappiamo

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= v^\dagger \gamma^0; \quad (\gamma^0)^2 = I; \quad \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 = \gamma_\mu; \quad \gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger; \quad (\bar{v})^\dagger = \gamma^0 v \\
\gamma^0 \gamma_5 &= -\gamma_5 \gamma^0; \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5
\end{aligned}$$

per cui, sostituendo, si ha

$$L_{\alpha\beta} = Tr \left\{ \sum_{a,b} \bar{v}_\nu^{(b)}(Q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_e^{(a)}(q) \cdot \bar{v}_e^{(a)}(q) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta v_\nu^{(b)}(Q) \right\} \quad (3.1046)$$

e quindi, usando la proprietà della traccia per cui $Tr(AB..CD) = Tr(DAB...C)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &= Tr \left\{ \left(\sum_b v_\nu^{(b)}(Q) \bar{v}_\nu^{(b)}(Q) \right) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \left(\sum_a v_e^{(a)}(q) \bar{v}_e^{(a)}(q) \right) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \right\} = \\
&= Tr \{ (\not{Q} - m_\nu) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (\not{q} - m_e) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} = \\
&= Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta - m_\nu \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta - \\
&\quad - m_e \not{Q} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta + m_\nu m_e \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} \quad (3.1047)
\end{aligned}$$

Gli ultimi due contributi sono evidentemente nulli, dato che $(1 + \gamma_5)(1 - \gamma_5) = 0$. Anche il secondo termine della somma, proporzionale a m_ν , è nullo e non solo perché abbiamo assunto $m_\nu = 0$, infatti risulta

$$\begin{aligned}
Tr \{ \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} &= Tr \{ \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (1 - \gamma_5) \not{q} \gamma_\beta \} = \\
&= 2 Tr \{ \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} \gamma_\beta \} = 2 Tr \{ \gamma_\alpha \not{q} \gamma_\beta - \gamma_\alpha \gamma_5 \not{q} \gamma_\beta \} \quad (3.1048)
\end{aligned}$$

e la traccia del prodotto di un numero dispari di γ^μ è nulla. Dunque, in definitiva, abbiamo

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &= Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \} = \\
&= Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (1 - \gamma_5) \not{q} \gamma_\beta \} = \\
&= 2 Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{q} \gamma_\beta \} = \\
&= 2 Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha \not{q} \gamma_\beta \} - 2 Tr \{ \not{Q} \gamma_\alpha \gamma_5 \not{q} \gamma_\beta \} = \\
&= 2 Q^\sigma q^\tau Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\tau \gamma_\beta \} - 2 Q^\sigma q^\tau Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\tau \gamma_\beta \} \quad (3.1049)
\end{aligned}$$

ma, come è dimostrato in Appendice, risulta

$$Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\tau \gamma_\beta \} = 4 [\delta_{\sigma\alpha} \delta_{\tau\beta} + \delta_{\sigma\beta} \delta_{\alpha\tau} - \delta_{\sigma\tau} \delta_{\alpha\beta}] \quad (3.1050)$$

$$Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\tau \gamma_\beta \} = Tr \{ \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\tau \gamma_\beta \gamma_5 \} = 4i \epsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} \quad (3.1051)$$

per cui, in definitiva, abbiamo $(\epsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau})$

$$L_{\alpha\beta} = 8 [Q_\alpha q_\beta + Q_\beta q_\alpha - (Q \cdot q) \delta_{\alpha\beta} + i \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} Q^\sigma q^\tau] \quad (3.1052)$$

dove Q è il quadrimpulso dell'antineutrino mentre q è quello del positrone.

Veniamo adesso al tensore adronico e procediamo nel solito modo: si ha

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta} &= \sum_{r,s} [\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P)] \cdot [\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P)]^* = \\ &= \sum_{r,s} Tr \left\{ [\bar{u}_n^{(s)}(p) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_p^{(r)}(P)] \cdot [\bar{u}_p^{(r)}(P) (1 + \gamma_5) \gamma^\beta u_n^{(s)}(p)] \right\} = \\ &= Tr \left\{ \left(\sum_s u_n^{(s)}(p) \bar{u}_n^{(s)}(p) \right) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \left(\sum_r u_p^{(r)}(P) \bar{u}_p^{(r)}(P) \right) (1 + \gamma_5) \gamma^\beta \right\} = \\ &= Tr \left\{ (\not{p} + M_n) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\not{P} + M_p) (1 + \gamma_5) \gamma^\beta \right\} \end{aligned} \quad (3.1053)$$

da cui, confrontando con quanto ottenuto per il tensore leptonico, si ottiene immediatamente¹⁸⁵

$$W^{\alpha\beta} = 8 [p^\alpha P^\beta + p^\beta P^\alpha - (p \cdot P) \delta^{\alpha\beta} + i \epsilon^{\alpha\beta\eta\rho} p_\eta P_\rho] \quad (3.1056)$$

dove P è il quadrimpulso del protone e p quello del neutrone.

Sia nel caso del tensore leptonico che in quello del tensore adronico, abbiamo la parte reale che è simmetrica mentre la parte immaginaria risulta antisimmetrica: evidentemente, nella contrazione dei due tensori, le due parte reali si contrarranno fra loro e così pure le due parte immaginarie, ma non ci saranno¹⁸⁶ termini misti.

¹⁸⁵Forse non è inutile ricordare che risulta altresì

$$Tr \{ \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\tau \gamma^\beta \} = 4 [\delta^{\sigma\alpha} \delta^{\tau\beta} + \delta^{\sigma\beta} \delta^{\alpha\tau} - \delta^{\sigma\tau} \delta^{\alpha\beta}] \quad (3.1054)$$

$$Tr \{ \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\tau \gamma^\beta \gamma_5 \} = 4i \epsilon^{\sigma\alpha\tau\beta} \quad (3.1055)$$

e che $\epsilon_{0123} = +1 = -\epsilon^{0123}$.

¹⁸⁶Termini misti sarebbero immaginari e si vede male come questi potrebbero esistere in un modulo quadro ... !

Risulta quindi

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} L_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta} = \frac{G_F^2}{2} 64 [Q_\alpha q_\beta + Q_\beta q_\alpha - (Q \cdot q) \delta_{\alpha\beta} + i \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} Q^\sigma q^\tau] \cdot \\
&\cdot [p^\alpha P^\beta + p^\beta P^\alpha - (p \cdot P) \delta^{\alpha\beta} + i \epsilon^{\alpha\beta\eta\rho} p_\eta P_\rho] = \\
&= 32 G_F^2 [(Qp)(qP) + (QP)(qp) - (pP)(qQ) + \\
&+ (QP)(qp) + (Qp)(qP) - (pP)(qQ) - \\
&- (Qq)(pP) - (Qq)(pP) + 4(pP)(qQ) - \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \epsilon^{\alpha\beta\eta\rho} p_\eta P_\rho Q^\sigma q^\tau] \quad (3.1057)
\end{aligned}$$

Tenendo conto che

$$\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \epsilon^{\alpha\beta\eta\rho} = -2 (\delta_\sigma^\eta \delta_\tau^\rho - \delta_\tau^\eta \delta_\sigma^\rho) \quad (3.1058)$$

abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= 32 G_F^2 [2(Qp)(qP) + 2(QP)(qp) + 2 p_\eta P_\rho Q^\sigma q^\tau (\delta_\sigma^\eta \delta_\tau^\rho - \delta_\tau^\eta \delta_\sigma^\rho)] = \\
&= 32 G_F^2 [2(Qp)(qP) + 2(QP)(qp) + 2(Qp)(qP) - 2(QP)(qp)] = \\
&= 128 G_F^2 (pQ)(qP) \quad (3.1059)
\end{aligned}$$

Sostituendo dunque la (3.1059) nell'espressione seguente della sezione d'urto differenziale (a e b indicano i moduli degli impulsi nel CM delle due particelle nello stato iniziale e finale, rispettivamente)

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{1}{64\pi s} \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{s - M_p^2} |\overline{\mathcal{M}}|^2 (-d \cos \theta) = \\
&= \frac{1}{64\pi s} \frac{b}{a} |\overline{\mathcal{M}}|^2 (-d \cos \theta) \quad (3.1060)
\end{aligned}$$

abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{G_F^2}{2\pi s} \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{s - M_p^2} (2pQ)(2Pq) (-d \cos \Theta) = \\
&= \frac{G_F^2}{2\pi s} \frac{b}{a} (2pQ)(2Pq) (-d \cos \Theta) \quad (3.1061)
\end{aligned}$$

Per questo tipo di processo, però, è più utile usare, al posto della variabile $\cos \theta \equiv \cos \theta_{CM}$, la variabile¹⁸⁷ y che abbiamo introdotto attraverso la (3.974) e per la quale abbiamo dimostrato che, ad s fissato, risulta

$$d(-\cos \Theta) = \frac{1}{\mathcal{B}} dy; \quad \mathcal{A} - \mathcal{B} \leq y \leq \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad (3.1064)$$

¹⁸⁷Secondo la definizione, la variabile y , che è scalare sotto il gruppo di Lorentz, come si è già visto, essa risulta espressa dalla equazione

$$y = \frac{P(Q - q)}{PQ} \quad (3.1062)$$

essendo, nel caso presente

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 1 - \frac{(s + m_e^2 - M_n^2)(s + M_p^2 - m_\nu^2)}{2s(s - M_p^2 - m_\nu^2)} = \\ &= 1 - \frac{(s + m_e^2 - M_n^2)(s + M_p^2)}{2s(s - M_p^2)}\end{aligned}\quad (3.1065)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2} \sqrt{(s - M_p^2 - m_\nu^2)^2 - 4M_p^2 m_\nu^2}}{2s(s - M_p^2 - m_\nu^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{2s} = \frac{2ab}{s - M_p^2}\end{aligned}\quad (3.1066)$$

e le semplificazioni dipendono dal fatto che abbiamo assunto $m_\nu = 0$.
In termini di questa variabile, abbiamo dunque

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dy} &= \frac{2G_F^2}{\pi} \frac{(pQ)(Pq)}{s(s - M_p^2)} \sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2} \frac{1}{\mathcal{B}} = \\ &= \frac{4G_F^2}{\pi} \frac{(pQ)(Pq)}{(s - M_p^2)} = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(2pQ)(2Pq)}{(s - M_p^2)}\end{aligned}\quad (3.1067)$$

D'altronde

$$y = \frac{2(PQ) - 2(Pq)}{2(PQ)} = 1 - \frac{2(Pq)}{2(PQ)} \Rightarrow 2(Pq) = 2(PQ)(1 - y) \quad (3.1068)$$

ma

$$s = (P + Q)^2 = 2(PQ) + M_p^2 \quad (3.1069)$$

e dunque

$$2(Pq) = (s - M_p^2)(1 - y) \quad (3.1070)$$

per cui abbiamo infine

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2}{\pi} (1 - y) (2pQ) \quad (3.1071)$$

Nel riferimento del Laboratorio, dove il protone può essere considerato fermo, essa vale dunque

$$y = \frac{M_p(E_\nu - E_e)}{M_p E_\nu} = \frac{E_\nu - E_e}{E_\nu} \quad (3.1063)$$

ovvero essa rappresenta proprio la frazione di energia leptonica che viene trasferita al sistema adronico, calcolata nel riferimento in cui l'adrone che subisce l'urto è inizialmente in quiete.

Fino a questo punto non abbiamo fatto approssimazioni, se non quella di considerare neutrone e protone come particelle di Dirac senza struttura interna.

D'altronde

$$\begin{aligned} P + Q &= p + q \Rightarrow P - q = p - Q \Rightarrow \\ \Rightarrow M_p^2 + m_e^2 - 2(Pq) &= M_n^2 - 2(pQ) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(pQ) &= M_n^2 - M_p^2 - m_e^2 + 2(Pq) \end{aligned} \quad (3.1072)$$

per cui, se confondiamo adesso la massa del protone con quella del neutrone e trascuriamo del tutto la massa dell'elettrone, ecco che $(Pq) = (Qp)$ e dunque risulta

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2}{\pi} (1-y)^2 (s - M^2) \quad (3.1073)$$

dove M è appunto la massa del nucleone.

Volendo adesso determinare la sezione d'urto totale relativa al processo di scattering in esame, occorre evidentemente integrare la (3.1073) fra gli estremi definiti nella (3.1064). D'altronde, nella stessa approssimazione sopra citata in cui si trascurano le masse leptoniche e si confondono fra loro quelle adroniche, risulta

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s + m_e^2 - M_n^2)(s + M_p^2 - m_\nu^2)}{2s(s - M_p^2 - m_\nu^2)} \rightarrow 1 - \frac{s + M^2}{2s} = \frac{s - M^2}{2s} \quad (3.1074)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{(s - M_n^2 - m_e^2)^2 - 4M_n^2 m_e^2}}{2s} \rightarrow \frac{s - M^2}{2s} \quad (3.1075)$$

e dunque l'integrazione in y va fatta fra $\mathcal{A} - \mathcal{B} = 0$ ed $\mathcal{A} + \mathcal{B} = 1 - \frac{M^2}{s}$.
Ma

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\frac{M^2}{s}} (1-y)^2 dy &= \int_{\frac{M^2}{s}}^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{M^2}{s} \right)^3 \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{M^2}{s} \right) \left[1 + \left(\frac{M^2}{s} \right) + \left(\frac{M^2}{s} \right)^2 \right] \\ &= \frac{s - M^2}{3s} \left[1 + \left(\frac{M^2}{s} \right) + \left(\frac{M^2}{s} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.1076)$$

per cui risulta evidentemente che

$$\sigma(\bar{\nu} p \rightarrow n e^+) = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(s - M^2)^2}{3s} \left[1 + \left(\frac{M^2}{s} \right) + \left(\frac{M^2}{s} \right)^2 \right] \quad (3.1077)$$

Nel caso del processo studiato da Cowan e Reines, l'energia E_ν del neutrino (nel sistema del laboratorio) era dell'ordine di alcuni MeV , quindi certamente grande

rispetto alla massa dell'elettrone ma molto minore di quella del nucleone. In questo caso (limite di bassa energia), essendo

$$s = 2E_\nu M + M^2 \Rightarrow s - M^2 = 2E_\nu M \quad (3.1078)$$

risulta

$$\sigma(\bar{\nu} p \rightarrow n e^+) = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{4E_\nu^2 M^2}{3s} \left[1 + \left(\frac{M^2}{s} \right) + \left(\frac{M^2}{s} \right)^2 \right] \approx \frac{G_F^2}{\pi} 4E_\nu^2 \quad (3.1079)$$

dove abbiamo usato il fatto che, in questa approssimazione $M^2/s \approx 1$.

Numericamente abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\nu} p \rightarrow n e^+) &\approx \frac{G_F^2}{\pi} 4E_\nu^2 \\ &= \frac{(1.166 \times 10^{-5})^2}{\pi} \cdot 4 \times 10^{-6} \left(\frac{E_\nu}{1 \text{ MeV}} \right)^2 \text{ GeV}^{-2} = \\ &= 1.73 \times 10^{-16} \left(\frac{E_\nu}{1 \text{ MeV}} \right)^2 \text{ GeV}^{-2} \end{aligned} \quad (3.1080)$$

Volendo esprimere la sezione d'urto totale σ in cm^2 , occorre moltiplicare l'espressione precedente per $(\hbar c)^2$: ricordando che

$$\hbar c = 197.327 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 0.197 \times 10^{-13} \text{ GeV} \cdot \text{cm}$$

otteniamo infine

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\nu} p \rightarrow n e^+) &= 1.73 \times 10^{-16} \cdot (0.197 \times 10^{-13})^2 \left(\frac{E_\nu}{1 \text{ MeV}} \right)^2 = \\ &= 6.72 \times 10^{-44} \left(\frac{E_\nu}{1 \text{ MeV}} \right)^2 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (3.1081)$$

in buon accordo con il valore (3.1029) trovato da Cowan e Reines, i.e.

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{exp} = 12_{-4}^{+7} \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (3.1082)$$

Va comunque detto che, in realtà, nemmeno nel caso dell'urto anelastico a bassa energia, quando la lunghezza d'onda di De Broglie del neutrino è comunque ancora molto maggiore delle dimensioni del nucleone, è lecito trascurarne la struttura interna. L'espressione del tensore $W^{\alpha\beta}$ ha altri contributi oltre a quelli visti in precedenza, ed anche quelli legati alla parte vettoriale ed assiale della corrente dipendono poi da fattori di forma che sono funzione del momento trasferito (dell'invariante $(Q - q)^2 \dots$).

Poi, nel limite di alta energia ($s \gg M^2$), dove l'espressione della sezione d'urto da noi calcolata fornirebbe

$$\sigma(\bar{\nu} p \rightarrow n e^+) \approx \frac{G_F^2}{3\pi} s = \frac{G_F^2}{3\pi} 2EM \quad (3.1083)$$

occorre tenere conto che l'urto avviene sui quarks costituenti (di *valenza* e su quelli virtuali (del *mare*): si parla, in questo caso, di Deep Inelastic Scattering (*DIS*) e la sua trattazione va oltre gli scopi di questo Corso.

3.6 Applicazione a processi di decadimento

Vediamo adesso come possiamo applicare quanto abbiamo appreso a processi di decadimento che, con quelli di scattering, completano le nostre possibilità di studio della dinamica delle interazioni fra particelle.

3.6.1 Il decadimento del pione

Vogliamo studiare la reazione di decadimento¹⁸⁸

$$\pi^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l \quad (3.1084)$$

dove l^- sta per un generico leptone negativo (può trattarsi solo di e^- o μ^- ... visto che $m_\tau \gg m_\pi$!).

Come abbiamo già avuto modo di osservare, esso avviene via interazione debole e precisamente via l'annichilazione dello stato $(d\bar{u})$ in un W^- virtuale che decade quindi in un sistema puramente leptonic, come mostra la fig.(8).

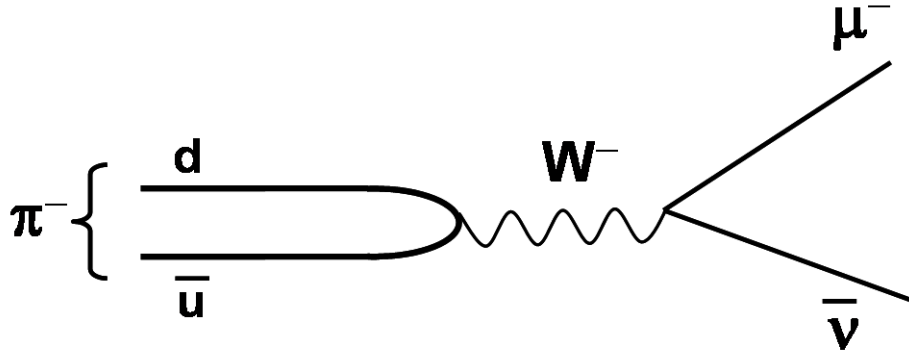


Figure 8: *Decadimento del pione negativo in muone e antineutrino muonico*

Poiché il processo avviene su una scala di energie ($m_\pi \approx 139 \text{ MeV}$) molto minore della massa¹⁸⁹ del W , la teoria di Fermi (corretta per la violazione di parità) è di nuovo del tutto adeguata a descriverlo. Essa afferma che

$$\mathcal{L}_W(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu(x) J_\mu^\dagger(x) \quad (3.1085)$$

dove $J^\mu(x)$ è la somma della corrente adronica e leptonica e, quanto a quest'ultima, come abbiamo già osservato in precedenza, risulta data da

$$J_{lept}^\mu(x) = \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(x) \quad (3.1086)$$

¹⁸⁸Per il decadimento coniugato di carica $\pi^+ \rightarrow l^+ \nu_l$ valgono considerazioni del tutto simili.

¹⁸⁹ $M_W \approx 81 \text{ GeV}$

Ricordiamo che, per quanto visto precedentemente, se prescindiamo dallo stato di spin delle particelle nello stato finale, il rate differenziale di decadimento risulta essere dato dall'espressione generale (3.833)

$$d\Gamma = \frac{1}{2S+1} \frac{1}{2E} \overline{|\mathcal{M}|^2} d\Phi \quad (3.1087)$$

dove S è lo spin della particella che decade ($S = 0$ per il pione ...), E è la sua energia nel sistema di riferimento dove stiamo operando, $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la somma sugli stati di spin iniziali e finali dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti del decadimento e $d\Phi$ è l'elemento di spazio delle fasi invariante associato allo stato finale, che, nel nostro caso, come si è già visto, è dato da

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{2s} d\Omega_{CM} \quad (3.1088)$$

essendo $d\Omega_{CM}$ l'elemento di angolo solido relativo ad una delle due particelle nello stato finale (la direzione di moto dell'altra è, ovviamente, opposta ...) ed s la massa invariante quadra del sistema, pari, ovviamente a $s = M^2$.

Se ci poniamo quindi nel sistema del CM , ovvero nel riferimento in cui il pione è fermo, ed assumiamo al solito che sia nulla la massa del neutrino, detta m la massa del leptone carico, risulta dunque

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{1} \frac{1}{2M} \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{1}{16\pi^2} \frac{(M^2 - m^2)}{2M^2} d\Omega_{CM} = \\ &= \frac{1}{32\pi} \frac{M^2 - m^2}{M^3} \overline{|\mathcal{M}|^2} d(-\cos\theta_{CM}) \end{aligned} \quad (3.1089)$$

dove M è la massa del pione e $d\Omega_{CM}$ si riferisce alla direzione di volo del leptone carico nel sistema del CM orientato, comunque, in modo arbitrario.

Veniamo adesso al calcolo esplicito di \mathcal{M} .

Per quanto già visto (cfr. eq.(3.814)), risulta

$$\mathcal{M} = \langle out | \mathcal{L}_W(0) | in \rangle \quad (3.1090)$$

dove si è usato il fatto che la densità lagrangiana debole non contiene accoppiamenti derivativi e dunque è opposto alla densità hamiltoniana.

Poiché gli stati adronici e leptonici hanno in comune solo lo stato di vuoto, deve essere

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle l^- \bar{\nu} | J_\mu^{lept}(0) | \Omega \rangle \cdot \langle \Omega | J_{had}^{\mu\dagger}(0) | \pi^- \rangle \quad (3.1091)$$

Ma allora, se indichiamo con P^μ il quadripulso del pione, essendo esso una particella senza spin, quanto alla quantità $\langle \Omega | J_{had}^{\mu\dagger}(0) | \pi^- \rangle$ essa non può che essere semplicemente proporzionale a P^μ , i.e.

$$\langle \Omega | J_{had}^{\mu\dagger}(0) | \pi^- \rangle = f P^\mu \quad (3.1092)$$

dove la costante f , nell'ottica di descrivere con lo stesso formalismo anche i decadimenti degli altri mesoni pseudoscalari, dovendo essere una funzione scalare di Lorentz, potrà dipendere, in questo caso, solo dalla massa stessa del pione, i.e.

$$f = f(m_\pi) = f_\pi \cos\theta_C \quad (3.1093)$$

dove il fattore $\cos\theta_C$ nasce dal fatto che oggi sappiamo che la reazione di annichilazione $(d\bar{u}) \rightarrow W^-$ procede attraverso la corrente $\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_C$ e il campo del quark d_C è sostanzialmente pari a $d_C = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C$ essendo s il campo del quark strano e θ_C l'angolo di Cabibbo.

Veniamo ora all'altra quantità che compare nella (3.1091), i.e. consideriamo l'espressione $\langle l^-, \bar{\nu}|J_\mu^{lept}(0)|\Omega \rangle$.

Più esplicitamente, se q e k con s, r sono, rispettivamente, gli impulsi e gli stati di spin del leptone carico e dell'antineutrino, dobbiamo valutare l'espressione

$$\langle l^-(q, s), \bar{\nu}(k, r)|\bar{\psi}_l(0)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu(0)|\Omega \rangle \quad (3.1094)$$

la quale, evidentemente, risulta pari a

$$\begin{aligned} & \langle l^-(q, s), \bar{\nu}(k, r)|\bar{\psi}_l(0)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu(0)|\Omega \rangle = \\ & = \langle l^-(q, s)|\bar{\psi}_l(0)|\Omega \rangle \gamma_\mu(1-\gamma_5) \langle \bar{\nu}(k, r)|\psi_\nu(0)|\Omega \rangle = \\ & = \bar{u}_l^{(s)}(q) \gamma_\mu(1-\gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \end{aligned} \quad (3.1095)$$

per cui, essendo $P^\mu = k^\mu + q^\mu$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C (k^\mu + q^\mu) \bar{u}_l^{(s)}(q) \gamma_\mu(1-\gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) = \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \bar{u}_l^{(s)}(q) \not{P} (1-\gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) - \\ &- \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \bar{u}_l^{(s)}(q) (1+\gamma_5) \not{k} v_\nu^{(r)}(k) \end{aligned} \quad (3.1096)$$

dove abbiamo usato il fatto che γ_5 anticommuta con tutte le γ_μ .

D'altronde, se come abbiamo fin'ora ammesso, possiamo considerare il neutrino come avente massa nulla, allora, per l'equazione di Dirac, si ha che

$$\not{k} v_\nu^{(r)}(k) = 0 \quad (3.1097)$$

mentre, per lo stesso motivo, risulta

$$\bar{u}_l^{(s)}(q) \not{q} = m \bar{u}_l^{(s)}(q) \quad (3.1098)$$

dove m è la massa del leptone carico. Dunque abbiamo infine

$$\mathcal{M} = -m \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \bar{u}_l^{(s)}(q) (1-\gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \quad (3.1099)$$

A noi, comunque, per calcolare $d\Gamma$, serve di valutare $|\overline{\mathcal{M}}|^2$, ovvero serve la quantità

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ m^2 \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 \right\} \quad (3.1100)$$

ma

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 &= \\ &= \sum_{r,s} \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right]^* = \\ &= \sum_{r,s} \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right]^\dagger = \\ &= Tr \left\{ \sum_{r,s} \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right]^\dagger \right\} \end{aligned} \quad (3.1101)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right]$ è un numero complesso e come tale può anche essere visto come una matrice 1×1 e quindi come coincidente con la sua stessa traccia.

Dunque, ricordando che $v^\dagger = \bar{v} \gamma^0$, $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, $\bar{u}^\dagger = \gamma^0 u$, $(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, abbiamo

$$\begin{aligned} Tr \left\{ \sum_{r,s} \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right]^\dagger \right\} &= \\ &= Tr \sum_{r,s} \bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma^0 u_l^{(s)}(q) \end{aligned} \quad (3.1102)$$

Ma $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(B \cdot C \cdot A)$, dunque

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 &= \\ &= Tr \left\{ \left[\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) \right] (1 - \gamma_5) \left[\sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \right] (1 + \gamma_5) \right\} \end{aligned} \quad (3.1103)$$

dove si è usato il fatto che γ^0 e γ_5 anticommutano, mentre $\gamma_0^2 = I$.

D'altronde, come sappiamo (si ricordi che il neutrino ha massa nulla ...)

$$\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) = \not{q} + m; \quad \sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) = \not{k} \quad (3.1104)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 &= Tr [(\not{q} + m)(1 - \gamma_5) \not{k} (1 + \gamma_5)] = \\ &= Tr [(\not{q} + m) \not{k} (1 + \gamma_5)^2] = 2 Tr [\not{q} + m] \not{k} (1 + \gamma_5) = \\ &= 2 Tr [\not{q} \not{k} + \not{q} \not{k} \gamma_5 + m \not{k} + m \not{k} \gamma_5] \end{aligned} \quad (3.1105)$$

ma

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4 \delta_{\mu\nu} \quad (3.1106)$$

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5) = 0 \quad (3.1107)$$

$$Tr(\gamma_\mu) = 0 \quad (3.1108)$$

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_5) = 0 \quad (3.1109)$$

per cui, in definitiva, risulta

$$m^2 \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = 8 m^2 (k \cdot q) \quad (3.1110)$$

e dunque, nel caso in cui non interessa lo stato di spin del leptone carico l^- , abbiamo

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ m^2 \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 \right\} = \\ &= 4 m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (k \cdot q) \end{aligned} \quad (3.1111)$$

per cui abbiamo

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} 4 m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (k \cdot q) \frac{1}{32\pi^2} \frac{M^2 - m^2}{M^2} d\Omega_{CM} \quad (3.1112)$$

ma

$$\begin{aligned} (k + q)^2 = M^2 &\Rightarrow M^2 = 0 + 2(k \cdot q) + m^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2(k \cdot q) = M^2 - m^2 = 2M E_\nu \end{aligned} \quad (3.1113)$$

dove E_ν è l'energia del neutrino nel sistema del CM .

Sostituendo nella (3.1111), otteniamo quindi

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 4M G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C m^2 E_\nu = 2m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (M^2 - m^2) \quad (3.1114)$$

e dunque

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} 2 m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (M^2 - m^2) \frac{1}{32\pi^2} \frac{M^2 - m^2}{M^2} d\Omega_{CM} \quad (3.1115)$$

da cui, integrando sull'angolo solido (il decadimento, come è ovvio che debba essere, è isotropo nel CM), si ha finalmente che

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2M} 2 m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (M^2 - m^2) \frac{1}{32\pi^2} \frac{M^2 - m^2}{M^2} 4\pi = \\ &= M m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \frac{1}{8\pi} \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.1116)$$

Questa relazione consente, in particolare, di determinare il rapporto fra i BR dei due decadimenti in elettrone-neutrino e muone-neutrino. Abbiamo

$$\begin{aligned}
R_\pi &\equiv \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{M_\pi^2 - m_e^2}{M_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{0.511}{105.7}\right)^2 \left(\frac{139.6^2 - 0.511^2}{139.6^2 - 105.7^2}\right)^2 \approx 2.337 \cdot 10^{-5} \times 5.492 \approx \\
&\approx 1.283 \cdot 10^{-4}
\end{aligned} \tag{3.1117}$$

che, per gli analoghi decadimenti del K , diventa¹⁹⁰

$$\begin{aligned}
R_K &\equiv \frac{\Gamma(K^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{M_K^2 - m_e^2}{M_K^2 - m_\mu^2}\right)^2 \approx 2.337 \cdot 10^{-5} \times 1.098 \approx \\
&\approx 2.567 \cdot 10^{-5}
\end{aligned} \tag{3.1119}$$

Questi risultati mostrano come il decadimento in elettrone-neutrino sia molto sfavorito rispetto a quello in muone-neutrino, nonostante il vantaggio del maggior spazio delle fasi a disposizione (tanto più vero nel decadimento del pione ...).

La ragione sta nella conservazione del momento angolare, unitamente al fatto che la struttura della corrente debole carica implica che, nel limite di massa nulla, l'elicità della particella e della antiparticella debbano essere opposte.

E' soltanto per via che i leptoni carichi hanno massa che essi possono essere prodotti in uno stato di elicità opposto a quanto stabilirebbe, per massa nulla, il proiettore di chiralità $\chi_- = \frac{1-\gamma_5}{2}$ caratteristico delle interazioni deboli, ma questa possibilità è pesata, nell'ampiezza del processo, con la massa stessa del leptone carico.

E' bene, però, a questo punto chiarire bene che la soppressione di elicità, descritta, per esempio, dal fattore (3.1119) nasce unicamente dal carattere vettoriale della corrente e non tanto dalla presenza in essa del proiettore chirale χ_- .

Infatti consideriamo una generica corrente vettoriale

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}_a(x) \gamma^\mu \psi_b(x) \tag{3.1120}$$

e supponiamo che, nel processo in cui essa è coinvolta, questa corrente sia responsabile della creazione della particella a e della antiparticella b (ricordiamo che ψ possiede l'operatore di creazione di antiparticelle, mentre $\bar{\psi}$ quello di creazione delle particelle), potendo essere, beninteso, anche che a e b siano la stessa particella (come accade in QED).

¹⁹⁰Lo SM , tenendo conto di correzioni di ordine superiore, fornisce, rispettivamente

$$R_\pi = 1.235 \cdot 10^{-4}; \quad R_K = 2.47 \cdot 10^{-5} \tag{3.1118}$$

$\bar{\psi}_{R,a} \gamma^\mu \psi_{R,b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{u} \chi_- \gamma^\mu \chi_+ v$		1 m_a / E_a m_b / E_b $m_a m_b / E_a E_b$
$\bar{\psi}_{L,a} \gamma^\mu \psi_{L,b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{u} \chi_+ \gamma^\mu \chi_- v$		1 m_a / E_a m_b / E_b $m_a m_b / E_a E_b$

Figure 9: Ampiezze di elicità associate alla corrente vettoriale

Ricordando che $\chi_+ + \chi_- = I$ e che $(\chi_\pm)^2 = \chi_\pm$, abbiamo intanto che

$$\begin{aligned}
 J^\mu &= \bar{\psi}_a \gamma^\mu (\chi_+ \psi_b) + \bar{\psi}_a \gamma^\mu (\chi_- \psi_b) = \bar{\psi}_a \gamma^\mu [(\chi_+)^2 \psi_b] + \bar{\psi}_a \gamma^\mu [(\chi_-)^2 \psi_b] = \\
 &= (\bar{\psi}_a \chi_-) \gamma^\mu (\chi_+ \psi_b) + (\bar{\psi}_a \chi_+) \gamma^\mu (\chi_- \psi_b)
 \end{aligned} \tag{3.1121}$$

dove si è usato il fatto che $\gamma^\mu \chi_\pm = \chi_\mp \gamma^\mu$.

Poniamo adesso¹⁹¹

$$\psi_R \equiv \chi_+ \psi \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} \chi_-; \quad \psi_L \equiv \chi_- \psi \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}_L = \bar{\psi} \chi_+ \tag{3.1123}$$

per cui risulta

$$J^\mu = \bar{\psi}_{R,a} \gamma^\mu \psi_{R,b} + \bar{\psi}_{L,a} \gamma^\mu \psi_{L,b} \tag{3.1124}$$

I due termini di cui sopra, detti rispettivamente *termine di corrente right (R)* e *termine di corrente left (L)*, nel caso considerato (creazione della particella a e della antiparticella b) generano, per quanto abbiamo già visto circa il legame fra chiralità ed elicità, ampiezze con i pesi relativi di cui alla Fig. 9 che, nel caso particolare in cui, per esempio, la massa della particella b sia nulla, si riducono come in Fig. 10.

Come si vede chiaramente, se il sistema delle due particelle considerate trae origine da una particella di spin nullo, la conservazione del momento angolare impone che possano contribuire comunque solo le ampiezze relative a processi con particelle/antiparticelle di elicità uguale, che sono però soppresse del fattore m/E ...

¹⁹¹Si ricordi che, visto che γ_5 è reale e simmetrica ed anticommuta con γ^0 , risulta

$$\overline{(\chi_\pm \psi)} = \bar{\psi} \chi_\mp \tag{3.1122}$$

$$\begin{array}{lll}
\bar{\psi}_{R,a} \gamma^\mu \psi_{R,b} \Rightarrow & \bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \rightarrow a & 1 \\
\Rightarrow \bar{u} \chi_- \gamma^\mu \chi_+ v & \bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \leftarrow a & m_a / E_a \\
\\
\bar{\psi}_{L,a} \gamma^\mu \psi_{L,b} \Rightarrow & \bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \leftarrow a & 1 \\
\Rightarrow \bar{u} \chi_+ \gamma^\mu \chi_- v & \bar{b} \leftarrow \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \rightarrow a & m_a / E_a
\end{array}$$

Figure 10: Ampiezze di elicità associate alla corrente vettoriale, nel caso in cui una massa sia nulla

Nel caso poi delle interazioni deboli, per via della struttura $V - A$, accade poi che sia presente solo il termine *left* ... ma questo fatto, come si è visto, non ha praticamente rilevanza alcuna sulla questione della soppressione di elicità !

Vediamo adesso come si modificano i risultati ottenuti in precedenza, nel caso in cui il neutrino abbia una massa $\mu \neq 0$ e sia una particella di Dirac. Iniziamo occupandoci di $|\mathcal{M}|^2$: il punto di partenza è ancora l'elemento di matrice (3.1096), i.e.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) \not{q} (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) + \bar{u}_l^{(s)}(q) (1 + \gamma_5) \not{k} v_\nu^{(r)}(k) \right] = \\
&= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \left[m \bar{u}_l^{(s)}(q) (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) - \mu \bar{u}_l^{(s)}(q) (1 + \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (3.1125)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\bar{u}_l^{(s)}(q) \not{q} = m \bar{u}_l^{(s)}(q)$ e che $\not{k} v_\nu^{(r)}(k) = -\mu v_\nu^{(r)}(k)$. Poniamo allora

$$R = m(1 - \gamma_5) - \mu(1 + \gamma_5) = (m - \mu) - \gamma_5(m + \mu) = R^\dagger \quad (3.1126)$$

risulta così

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (3.1127)$$

da cui ricaviamo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2\theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k)|^2 \quad (3.1128)$$

ma, al solito, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\sum_{r,s} |\bar{u} R v|^2 &= \sum_{r,s} (\bar{u} R v) \cdot (\bar{u} R v)^* = \sum_{r,s} (\bar{u} R v) \cdot (\bar{u} R v)^\dagger = \\
&= Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} R v v^\dagger R^\dagger \bar{u}^\dagger \right] = Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} R v \bar{v} \gamma^0 R \gamma^0 u \right] = \\
&= Tr \left\{ \left(\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) \right) R \left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \right) \gamma^0 R \gamma^0 \right\} = \\
&= Tr \left\{ (\not{q} + m) R (\not{k} - \mu) \hat{R} \right\} \tag{3.1129}
\end{aligned}$$

dove abbiamo definito

$$\hat{R} \equiv \gamma^0 R \gamma^0 = (m - \mu) + \gamma_5(m + \mu) \tag{3.1130}$$

Siccome sia R che \hat{R} hanno un numero pari di matrici γ , gli unici termini che possono contribuire alla traccia (3.1129) sono

$$-m \mu Tr(R \hat{R}) + Tr(\not{q} R \not{k} \hat{R}) \tag{3.1131}$$

Risulta (si ricordi che $Tr(\gamma_5) = 0$)

$$\begin{aligned}
-m \mu Tr(R \hat{R}) &= -m \mu Tr \{ [(m - \mu) - \gamma_5(m + \mu)][(m - \mu) + \gamma_5(m + \mu)] \} = \\
&= -m \mu [4(m - \mu)^2 - 4(m + \mu)^2] = 16 m^2 \mu^2 \tag{3.1132}
\end{aligned}$$

mentre è (si ricordi che $Tr(\gamma_5) \gamma^\alpha \gamma^\beta = 0$)

$$\begin{aligned}
Tr(\not{q} R \not{k} \hat{R}) &= Tr \{ \not{q} [(m - \mu) - \gamma_5(m + \mu)] \not{k} [(m - \mu) + \gamma_5(m + \mu)] \} = \\
&= Tr \left\{ (m - \mu)^2 \not{q} \not{k} - (m + \mu)^2 \not{q} \gamma_5 \not{k} \gamma_5 \right\} = \\
&= 4(m - \mu)^2(qk) + 4(m + \mu)^2(qk) = 8(m^2 + \mu^2)(qk) \tag{3.1133}
\end{aligned}$$

per cui, in definitiva, risulta

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k)|^2 = 8(m^2 + \mu^2)(qk) + 16 m^2 \mu^2 \tag{3.1134}$$

e dunque, finalmente,

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot 8 [(m^2 + \mu^2)(qk) + 2 m^2 \mu^2] = \\
&= 4 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot [(m^2 + \mu^2)(qk) + 2 m^2 \mu^2] = \\
&= 4 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \left\{ m^2 [\mu^2 + (qk)] + \mu^2 [m^2 + (qk)] \right\} = \\
&= 2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \left\{ m^2 (2\mu^2 + M^2 - m^2 - \mu^2) + \mu^2 (2m^2 + M^2 - m^2 - \mu^2) \right\} = \\
&= 2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \left\{ m^2 2M E_\nu + \mu^2 2M E_l \right\} = \\
&= 4M G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \left\{ m^2 E_\nu + \mu^2 E_l \right\} \tag{3.1135}
\end{aligned}$$

dove E_ν ed E_l sono, rispettivamente, le energie nel centro di massa del neutrino e del leptone (da confrontare con la (3.1114), ottenuta direttamente nel caso in cui $\mu = 0$).

Per quanto riguarda infine $d\Gamma$, occorre tenere conto della massa del neutrino anche nell'elemento di angolo solido $d\Phi$: si ha

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{M^2 - m^2}{2M^2} d\Omega_{CM} \rightarrow \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2 - 4m^2\mu^2}}{2M^2} d\Omega_{CM} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{b_l}{\sqrt{s}} d\Omega_{CM} \end{aligned} \quad (3.1136)$$

dove b_l è il modulo dell'impulso spaziale del leptone carico e dell'antineutrino, visti nel sistema del CM . Risulta quindi

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2M} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Phi = \\ &= \frac{1}{2M} \cdot 4M G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2\theta_C \cdot \{m^2 E_\nu + \mu^2 E_l\} \cdot \frac{1}{16\pi^2} \frac{b_l}{M} d\Omega_{CM} \end{aligned}$$

ovvero, integrando sull'angolo solido, abbiamo infine

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2\pi} G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2\theta_C \{m^2 E_\nu + \mu^2 E_l\} \frac{b_l}{M} = \\ &= \frac{1}{4\pi} G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2\theta_C \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)(m^2 + \mu^2) + 4m^2\mu^2}{M^2} b_l = \\ &= \frac{1}{4\pi} G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2\theta_C \frac{m^2(M^2 - m^2) - \mu^2(M^2 + 2m^2 - \mu^2)}{M^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sqrt{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2 - 4m^2\mu^2}}{2M} \end{aligned} \quad (3.1137)$$

Fin qui abbiamo ignorato lo stato di spin delle particelle prodotte.

E' però molto istruttivo vedere che cosa accade ad $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ quando, per esempio, si fissi lo stato di spin del leptone carico l^- .

Inizieremo assumendo di nuovo che la massa del neutrino sia nulla.

Occorre ripartire dalla (3.1096), inserendo adesso nell'espressione dell'elemento di matrice, il proiettore di spin del leptone¹⁹²

$$\Pi = \frac{1 + \gamma_5 \not{N}}{2} \quad (3.1139)$$

¹⁹²Si ricordi che (idem per lo spinore v ...)

$$\begin{aligned} \overline{(\Pi u)} &= (\Pi u)^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \Pi^\dagger \gamma^0 = \bar{u} \gamma^0 \Pi^\dagger \gamma^0 = \bar{u} \gamma^0 \frac{1 + \not{N}^\dagger \gamma_5}{2} \gamma^0 = \bar{u} \frac{1 - \gamma^0 \not{N}^\dagger \gamma^0 \gamma_5}{2} = \\ &= \bar{u} \frac{1 - \not{N} \gamma_5}{2} = \bar{u} \frac{1 + \gamma_5 \not{N}}{2} = \bar{u} \Pi \end{aligned} \quad (3.1138)$$

descritto dal quadrivettore N^μ , le cui proprietà generali, lo ricordiamo, sono che

$$(Nq) = 0; \quad N^2 = -1 \quad (3.1140)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi \not{q} (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) + \right. \\ & \left. + \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 + \gamma_5) \not{k} v_\nu^{(r)}(k) \right] \end{aligned} \quad (3.1141)$$

ovvero, essendo la massa del neutrino nulla ($\not{k} v_\nu^{(r)}(k) = 0$), risulta

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi \not{q} (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (3.1142)$$

Ma i proiettori di spin commutano con i proiettori Λ_\pm e dunque¹⁹³

$$\Pi(\not{q} + m) = (\not{q} + m)\Pi \Rightarrow \Pi \not{q} = \not{q} \Pi \quad (3.1143)$$

per cui, essendo $\bar{u}_l^{(s)}(q) \not{q} = m \bar{u}_l^{(s)}(q)$, abbiamo

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \left[m \bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (3.1144)$$

e dunque

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = m^2 \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2\theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 \quad (3.1145)$$

Procediamo dunque al calcolo di $\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2$. Si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = \\ & = \sum_{r,s} [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v] [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v]^* = \sum_{r,s} [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v] [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v]^\dagger = \\ & = Tr \left\{ \sum_{r,s} [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v] [\bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v]^\dagger \right\} = \\ & = Tr \left\{ \sum_{r,s} \bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v v^\dagger (1 - \gamma_5) \Pi^\dagger \bar{u}^\dagger \right\} = \end{aligned}$$

¹⁹³Come è noto, infatti, essendo $(Nq) = 0$, si ha

$$\gamma_5 \not{N} \cdot \not{q} = \gamma_5 N_\alpha q_\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta = \gamma_5 N_\alpha q_\beta [-\gamma^\beta \gamma^\alpha + 2\delta^{\alpha\beta}] = -\gamma_5 \not{q} \cdot \not{N} + 2\gamma_5 (Nq) = \not{q} \cdot \gamma_5 \not{N}$$

$$\begin{aligned}
&= Tr \left\{ \sum_{r,s} \bar{u} \Pi (1 - \gamma_5) v \bar{v} \gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma^0 \Pi \gamma^0 \gamma^0 u \right\} = \\
&= Tr \left\{ \left(\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) \right) \Pi (1 - \gamma_5) \left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \right) (1 + \gamma_5) \Pi \right\} = \\
&= Tr \{ (m + \not{q}) \Pi (1 - \gamma_5) (\not{k}) (1 + \gamma_5) \Pi \} = Tr \{ \Pi (m + \not{q}) \Pi (1 - \gamma_5)^2 \not{k} \} = \\
&= 2Tr \{ (m + \not{q}) \Pi^2 (1 - \gamma_5) \not{k} \} = 2Tr \{ (m + \not{q}) \Pi (1 - \gamma_5) \not{k} \} \quad (3.1146)
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che

$$\begin{aligned}
\bar{u}^\dagger &= \gamma^0 u, \quad \Pi^\dagger = \gamma^0 \Pi \gamma^0, \quad (1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5), \quad \Pi^2 = \Pi, \quad \Pi \not{q} = \not{q} \Pi \\
\sum_s u^{(s)}(q) \bar{u}^{(s)}(q) &= \not{q} + m, \quad \sum_r v^{(r)}(k) \bar{v}^{(r)}(k) = \not{k}
\end{aligned}$$

Risulta quindi dalla (3.1146), ricordando la definizione di Π , che

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = Tr \{ (m + \not{q}) (1 + \gamma_5 \not{N}) (1 - \gamma_5) \not{k} \} = \\
&= Tr \{ m(1 + \gamma_5 \not{N}) (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q}(1 + \gamma_5 \not{N}) (1 - \gamma_5) \not{k} \} = \\
&= Tr \{ m(1 - \gamma_5) \not{k} + m \gamma_5 \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q} \gamma_5 \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q} (1 - \gamma_5) \not{k} \}
\end{aligned}$$

ma i termini con un numero dispari di γ hanno traccia nulla, per cui il primo ed il terzo addendo dell'espressione di sopra danno contributo nullo alla traccia, e quindi

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = Tr \{ m \gamma_5 \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q} (1 - \gamma_5) \not{k} \} \quad (3.1147)$$

ma

$$\gamma_5 \not{N} (1 - \gamma_5) = - \not{N} \gamma_5 (1 - \gamma_5) = \not{N} (1 - \gamma_5) \quad (3.1148)$$

e ricordando che la traccia del prodotto di due γ per la γ_5 è nulla, ecco che si ha

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = Tr \{ m \not{N} (1 - \gamma_5) \not{k} + \not{q} (1 - \gamma_5) \not{k} \} = \\
&= Tr \{ m \not{N} \not{k} + \not{q} \not{k} \} = 4m(N \cdot k) + 4(q \cdot k) \equiv 4(r_+ \cdot k) \quad (3.1149)
\end{aligned}$$

dove si è posto, per definizione,

$$r_+^\mu \equiv q^\mu + m N^\mu \quad (3.1150)$$

Sostituendo nella (3.1145), si ottiene¹⁹⁴ dunque

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= m^2 \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = \\
&= m^2 \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (4r_+ \cdot k) = 2m^2 G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C (r_+ \cdot k) \quad (3.1151)
\end{aligned}$$

¹⁹⁴Chiaramente, se sommiamo le due ampiezze quadre, ottenute per la polarizzazione N^μ e per la sua opposta $-N^\mu$, essendo che $(r_+ \cdot k) + (r_- \cdot k) = 2(qk)$ ritroviamo la (3.1111)...

E' immediato adesso dimostrare che il fattore $(r_+ \cdot k)$ è nullo quando si scelga come direzione e verso di polarizzazione del leptone quella corrispondente ad elicità negativa nel riferimento del CM (pione fermo). Infatti, in questo riferimento, quanto agli impulsi, usando le formula consuete, abbiamo che

$$l^- : q = (E, b \vec{n}); \quad \bar{\nu} : k = (b, -b \vec{n}) \quad (3.1152)$$

con

$$b = \frac{M^2 - m^2}{2M}; \quad E = \frac{M^2 + m^2}{2M} \quad (3.1153)$$

dove M è la massa del pione (o del kappa ...) ed m è quella del leptone carico. Il quadrivettore che descrive l'elicità positiva del leptone nel riferimento del CM è allora, come sappiamo, il seguente

$$N = \frac{1}{m}(b, E \vec{n}) \quad (3.1154)$$

per cui, per l'elicità negativa, si ha

$$\begin{aligned} r_+ &= q + m(-N) = (E, b \vec{n}) - (b, E \vec{n}) = (E - b, (b - E) \vec{n}) = \\ &= (E - b)(1, -\vec{n}) \end{aligned} \quad (3.1155)$$

il quale ha prodotto scalare nullo con il quadrivettore $k = b(1, -\vec{n})$ essendo¹⁹⁵ light-like e ad esso proporzionale.

Questo dimostra che il leptone negativo originato dal decadimento è in uno stato di elicità definita ed essa è positiva, ovvero "opposta" a quella che, per una particella di massa nulla, stabilirebbe il proiettore chirale che compare nella lagrangiana che descrive le interazioni deboli, e questa è la ragione per la quale il

¹⁹⁵Si ricordi che, se q^μ è il quadrimpulso di una particella di Dirac di massa m in un certo riferimento inerziale, allora i quadrivettori che ne descrivono la polarizzazione in una data direzione (nei due versi ...) in quel riferimento sono della forma

$$n^\mu = \pm \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{\hat{q} \cdot q} \hat{q}^\mu - q^\mu \right) \quad (3.1156)$$

dove \hat{q} è un quadrivettore light-like. Ne segue che

$$\pm m n^\mu = \frac{m^2}{\hat{q} \cdot q} \hat{q}^\mu - q^\mu \quad (3.1157)$$

e quindi anche i quadrivettori

$$r_\pm^\mu = q^\mu \pm m n^\mu = \frac{m^2}{\hat{q} \cdot q} \hat{q}^\mu \quad (3.1158)$$

sono comunque light-like con parte temporale positiva visto che, come segue immediatamente dalla (3.1158), nel sistema di quiete della particella la loro parte temporale vale proprio $+m$.

decadimento del pione (κ) nel più massivo muone è più frequente di quello in elettrone.

Questa deduzione è esatta nell'ipotesi in cui la massa del neutrino è nulla.

Ma vediamo che succede nel caso in cui $\mu \neq 0$. Il punto di partenza è sempre l'elemento di matrice (3.1096) che, nel caso in cui $\mu \neq 0$, ha condotto alla (3.1127), i.e.

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (3.1159)$$

Quando si imponga al leptone carico una polarizzazione $\Pi = \frac{1+\gamma_5 \not{M}}{2}$, questo, avendo posto $R = (m - \mu) - \gamma_5(m + \mu)$, diventa

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \left[\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R v_\nu^{(r)}(k) \right] \quad (3.1160)$$

da cui

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2\theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R v_\nu^{(r)}(k)|^2 \quad (3.1161)$$

e la sommatoria, stavolta, diventa

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R v|^2 &= \sum_{r,s} (\bar{u} \Pi R v) \cdot (\bar{u} \Pi R v)^* = \sum_{r,s} (\bar{u} \Pi R v) \cdot (\bar{u} \Pi R v)^\dagger = \\ &= Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} \Pi R v v^\dagger R^\dagger \Pi^\dagger \bar{u}^\dagger \right] = Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} \Pi R v \bar{v} \gamma^0 R \Pi^\dagger \gamma^0 u \right] = \\ &= Tr \left\{ \left(\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) \right) \Pi R \left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \right) \gamma^0 R \gamma^0 \Pi \right\} = \\ &= Tr \left\{ (\not{q} + m) \Pi R (\not{k} - \mu) \hat{R} \Pi \right\} = Tr \left\{ \Pi (\not{q} + m) \Pi R (\not{k} - \mu) \hat{R} \right\} = \\ &= Tr \left\{ (\not{q} + m) \Pi R (\not{k} - \mu) \hat{R} \right\} \equiv \sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R v|^2 \end{aligned} \quad (3.1162)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\Pi (\not{q} + m) = (\not{q} + m) \Pi$ e che $\Pi^2 = \Pi$.

Questa traccia è fatta da quattro termini, che sono i seguenti:

$$1) : \quad Tr \left\{ \not{q} \Pi R \not{k} \hat{R} \right\} = Tr \left\{ \not{q} \Pi R^2 \not{k} \right\} \quad (3.1163)$$

$$2) : \quad m Tr \left\{ \Pi R \not{k} \hat{R} \right\} = m Tr \left\{ \Pi R^2 \not{k} \right\} \quad (3.1164)$$

$$3) : \quad -\mu Tr \left\{ \not{q} \Pi R \hat{R} \right\} \quad (3.1165)$$

$$4) : \quad -m \mu Tr \left\{ \Pi R \hat{R} \right\} \quad (3.1166)$$

dove

$$\begin{aligned} R^2 &= (m - \mu)^2 + (m + \mu)^2 - 2\gamma_5(m^2 - \mu^2) = \\ &= 2(m^2 + \mu^2) - 2\gamma_5(m^2 - \mu^2) \end{aligned} \quad (3.1167)$$

$$R \hat{R} = (m - \mu)^2 - (m + \mu)^2 = -4m\mu \quad (3.1168)$$

Quindi, quanto al primo termine, abbiamo

$$\begin{aligned} Tr \left\{ \not{q} \Pi R^2 \not{k} \right\} &= Tr \left\{ \not{q} (1 + \gamma_5 \not{N}) \left[(m^2 + \mu^2) - \gamma_5 (m^2 - \mu^2) \right] \not{k} \right\} = \\ &= Tr \left\{ \not{q} (m^2 + \mu^2) \not{k} \right\} = 4 (m^2 + \mu^2) (q \cdot k) \end{aligned} \quad (3.1169)$$

mentre dal secondo termine otteniamo

$$\begin{aligned} m Tr \left\{ \Pi R^2 \not{k} \right\} &= m Tr \left\{ (1 + \gamma_5 \not{N}) \left[(m^2 + \mu^2) - \gamma_5 (m^2 - \mu^2) \right] \not{k} \right\} = \\ &= m Tr \left\{ \gamma_5 \not{N} (-\gamma_5 (m^2 - \mu^2)) \not{k} \right\} = \\ &= 4 m (m^2 - \mu^2) (N \cdot k) \end{aligned} \quad (3.1170)$$

Quanto al terzo termine esso non contribuisce, infatti

$$-\mu Tr \left\{ \not{q} \Pi R \hat{R} \right\} = \frac{-\mu}{2} Tr \left\{ \not{q} (1 + \gamma_5 \not{N}) (-4m\mu) \right\} = 0 \quad (3.1171)$$

mentre il quarto termine fornisce

$$-m \mu Tr \left\{ \Pi R \hat{R} \right\} = -\frac{m \mu}{2} Tr \left\{ (1 + \gamma_5 \not{N}) (-4m\mu) \right\} = 8 m \mu^2 \quad (3.1172)$$

Quindi risulta infine che

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R v|^2 &= 4 (m^2 + \mu^2) (q \cdot k) + 4 m (m^2 - \mu^2) (N \cdot k) + 8 m^2 \mu^2 \quad (3.1173) \\ &= 4 (m^2 (q \cdot k + m N \cdot k) + 4 \mu^2 (q \cdot k - m N \cdot k) + 8 m^2 \mu^2) = \\ &= 4 m^2 (r_+ \cdot k) + 4 \mu^2 (r_- \cdot k) + 8 m^2 \mu^2 \end{aligned} \quad (3.1174)$$

ovvero abbiamo¹⁹⁶

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R v_\nu^{(r)}(k)|^2 \\ &= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left[2 m^2 (r_+ \cdot k) + 2 \mu^2 (r_- \cdot k) + 4 m^2 \mu^2 \right] \end{aligned} \quad (3.1177)$$

¹⁹⁶Si osservi che

- sommando sui due stati di polarizzazione descritti dai quadri-vettori N e $-N$ riotteniamo la (3.1134)

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_\nu^{(r)}(k)|^2 = 8(m^2 + \mu^2)(qk) + 16 m^2 \mu^2 \quad (3.1175)$$

- ponendo $\mu = 0$ riotteniamo la (3.1149), (si ricordi che, per $\mu \rightarrow 0$, $R \rightarrow m\chi_- \dots$)

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi m (1 - \gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)|^2 = 4 m^2 (r_+ \cdot k) \quad (3.1176)$$

Siccome r_{\pm} sono quadri-vettrici light-like con parte temporale positiva, le quantità $(r_{\pm} \cdot k)$ sono sempre strettamente positive¹⁹⁷.

Questo significa che il leptone uscente, adesso, *non* è in uno stato puro (di spin) e quindi non è completamente polarizzato.

Lo stato finale è uno stato *entangled* e, visto che il pione non possiede spin e che il decadimento avviene in onda S essendo l'interazione "di contatto", la conservazione del momento angolare impone che ci sia completa correlazione fra le elicità¹⁹⁸ dei due leptoni le quali, però, risultano adesso possibili entrambe: evidentemente, quindi, se prescindiamo dallo stato di spin dell'antineutrino, il leptone carico può essere descritto solo come una miscela statistica di stati per cui non appare completamente polarizzato non essendo in uno stato puro.

Verifichiamo adesso la correlazione menzionata sopra fra le elicità .

Per questo, ripartiamo dall'elemento di matrice (3.1096) che, nel caso in cui $\mu \neq 0$, ha condotto alla (3.1127), i.e.

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_{\pi} \cos\theta_C [\bar{u}_l^{(s)}(q) R v_{\nu}^{(r)}(k)] \quad (3.1178)$$

dove $R \equiv (m - \mu) - \gamma_5(m + \mu) = R^{\dagger}$.

Imponendo che lo stato di spin del leptone carico sia quello che è definito attraverso il proiettore $\Pi = \frac{1+\gamma_5\not{M}}{2}$ e che lo stato di spin del leptone neutro sia quello definito attraverso il proiettore $\Xi = \frac{1+\gamma_5\not{M}'}{2}$, l'elemento di matrice che descrive il processo diventa

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} f_{\pi} \cos\theta_C [\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R \Xi v_{\nu}^{(r)}(k)] \quad (3.1179)$$

da cui otteniamo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |f_{\pi}|^2 \cos^2\theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R \Xi v_{\nu}^{(r)}(k)|^2 \quad (3.1180)$$

e la sommatoria diventa ora¹⁹⁹

$$\sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R \Xi v|^2 = \sum_{r,s} (\bar{u} \Pi R \Xi v) \cdot (\bar{u} \Pi R \Xi v)^{\dagger} =$$

¹⁹⁷Evidentemente, se indichiamo con \hat{r}_{\pm}^0 le componenti temporali (positive !) dei quadri-vettrici r_{\pm} nel riferimento di quiete dell'antineutrino, la quantità scalare che stiamo considerando vale

$$2m^2(r_+ \cdot k) + 2\mu^2(r_- \cdot k) + 4m^2\mu^2 = 2m^2\mu\hat{r}_+^0 + 2\mu^2\mu\hat{r}_-^0 + 4m^2\mu^2 > 0$$

¹⁹⁸Rispetto al caso del neutrino con massa nulla in cui lo stato finale era rappresentato da un unico vettore di stato, adesso lo stato finale può essere descritto in termini di due vettori di stato in cui, alternativamente, un leptone ha l'elicità "sbagliata". I due stati si realizzano con le proprie opportune probabilità e quindi si sommano in modo incoerente (si sommano le probabilità e non le ampiezze ...).

¹⁹⁹Si ricordi che

$$R \equiv (m - \mu) - \gamma_5(m + \mu) = R^{\dagger}; \quad \hat{R} \equiv (m - \mu) + \gamma_5(m + \mu)$$

$$\begin{aligned}
&= Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} \Pi R \Xi v v^\dagger \Xi^\dagger R^\dagger \Pi^\dagger \bar{u}^\dagger \right] = Tr \left[\sum_{r,s} \bar{u} \Pi R \Xi v \bar{v} \gamma^0 \Xi^\dagger R \Pi^\dagger \gamma^0 u \right] = \\
&= Tr \left\{ \left(\sum_s u_l^{(s)}(q) \bar{u}_l^{(s)}(q) \right) \Pi R \Xi \left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k) \bar{v}_\nu^{(r)}(k) \right) \Xi \gamma^0 R \gamma^0 \Pi \right\} = \\
&= Tr \left\{ (\not{q} + m) \Pi R \Xi (\not{k} - \mu) \Xi \hat{R} \Pi \right\} = Tr \left\{ \Pi (\not{q} + m) \Pi R \Xi (\not{k} - \mu) \Xi \hat{R} \right\} = \\
&= Tr \left\{ (\not{q} + m) \Pi R (\not{k} - \mu) \Xi \hat{R} \right\} \equiv \sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R \Xi v|^2 \quad (3.1181)
\end{aligned}$$

Questa traccia è fatta dei quattro termini seguenti

$$1) : \quad Tr \left\{ \not{q} \Pi R \not{k} \Xi \hat{R} \right\} \quad (3.1182)$$

$$2) : \quad m Tr \left\{ \Pi R \not{k} \Xi \hat{R} \right\} \quad (3.1183)$$

$$3) : \quad -\mu Tr \left\{ \not{q} \Pi R \Xi \hat{R} \right\} \quad (3.1184)$$

$$4) : \quad -m \mu Tr \left\{ \Pi R \Xi \hat{R} \right\} \quad (3.1185)$$

e risulta

$$\begin{aligned}
\Pi R &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \not{N}) [(m - \mu) - \gamma_5 (m + \mu)] = \\
&= \frac{1}{2} [(m - \mu) I - (m + \mu) \gamma_5 + (m - \mu) \gamma_5 \not{N} + (m + \mu) \not{N}] \quad (3.1186)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Xi \hat{R} &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \not{\eta}) [(m - \mu) + \gamma_5 (m + \mu)] = \\
&= \frac{1}{2} [(m - \mu) I + (m + \mu) \gamma_5 + (m - \mu) \gamma_5 \not{\eta} - (m + \mu) \not{\eta}] \quad (3.1187)
\end{aligned}$$

I contributi non nulli al primo termine sono solo i seguenti (per ogni termine in ΠR esiste un solo termine in $\Xi \hat{R}$ che consente un contributo non nullo alla traccia ...)

$$\begin{aligned}
Tr \left\{ \not{q} \Pi R \not{k} \Xi \hat{R} \right\} &= \frac{1}{4} Tr \left\{ \not{q} (m - \mu) \not{k} (m - \mu) - \not{q} (m + \mu) \gamma_5 \not{k} (m + \mu) \gamma_5 + \right. \\
&\quad \left. + \not{q} (m - \mu) \gamma_5 \not{N} \not{k} (m + \mu) \gamma_5 \not{\eta} - \not{q} (m + \mu) \not{N} \not{k} (m + \mu) \not{\eta} \right\} = \\
&= \frac{4}{4} \left\{ (m - \mu)^2 + (m + \mu)^2 \right\} (q \cdot k) + \\
&\quad + \frac{1}{4} [(m - \mu)^2 - (m + \mu)^2] Tr \left\{ \not{q} \not{N} \not{k} \not{\eta} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^0 \Xi^\dagger \gamma^0 &= \Xi; & \Xi^2 &= \Xi \\
\Pi (\not{q} + m) &= (\not{q} + m) \Pi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^0 \Pi^\dagger \gamma^0 &= \Pi; & \Pi^2 &= \Pi \\
\Xi (\not{k} - \mu) &= (\not{k} - \mu) \Xi
\end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned}
Tr \{ \not{q} \not{N} \not{k} \not{n} \} &= q_\alpha N_\beta k_\nu n_\rho Tr \{ \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\rho \} = \\
&= 4 q_\alpha N_\beta k_\nu n_\rho (\delta^{\alpha\beta} \delta^{\nu\rho} + \delta^{\alpha\rho} \delta^{\beta\nu} - \delta^{\alpha\nu} \delta^{\beta\rho}) = \\
&= 4[(q \cdot N)(k \cdot n) + (q \cdot n)(k \cdot N) - (q \cdot k)(n \cdot N)] \quad (3.1188)
\end{aligned}$$

e siccome $(q \cdot N) = (k \cdot n) = 0$, abbiamo infine che

$$\begin{aligned}
Tr \{ \not{q} \Pi R \not{k} \Xi \hat{R} \} &= \\
&= 2(m^2 + \mu^2)(q \cdot k) - 4m\mu(q \cdot n)(k \cdot N) + 4m\mu(q \cdot k)(n \cdot N) \quad (3.1189)
\end{aligned}$$

Veniamo ora al secondo termine: abbiamo

$$\begin{aligned}
m Tr \{ \Pi R \not{k} \Xi \hat{R} \} &= \frac{m}{4} Tr \{ -(m - \mu) \not{k}(m + \mu) \not{n} - (m + \mu) \gamma_5 \not{k}(m - \mu) \gamma_5 \not{n} + \\
&+ (m - \mu) \gamma_5 \not{N} \not{k}(m + \mu) \gamma_5 + (m + \mu) \not{N} \not{k}(m - \mu) \} = \\
&= \frac{4m}{4} \{ -(m^2 - \mu^2)(k \cdot n) + (m^2 - \mu^2)(k \cdot n) + \\
&+ (m^2 - \mu^2)(k \cdot N) + (m^2 - \mu^2)(k \cdot N) \} = \\
&= 2m(m^2 - \mu^2)(k \cdot N) \quad (3.1190)
\end{aligned}$$

Quanto al terzo termine, analogamente risulta

$$\begin{aligned}
-\mu Tr \{ \not{q} \Pi R \Xi \hat{R} \} &= -\frac{\mu}{4} Tr \{ -\not{q}(m - \mu)(m + \mu) \not{n} - \not{q}(m + \mu) \gamma_5 (m - \mu) \gamma_5 \not{n} + \\
&+ \not{q}(m - \mu) \gamma_5 \not{N} (m + \mu) \gamma_5 + \not{q}(m + \mu) \not{N} (m - \mu) \} = \\
&= -\frac{4\mu}{4} \{ -(m^2 - \mu^2)(n \cdot q) - (m^2 - \mu^2)(n \cdot q) + \\
&- (m^2 - \mu^2)(N \cdot q) + (m^2 - \mu^2)(N \cdot q) \} = \\
&= 2\mu(m^2 - \mu^2)(n \cdot q) \quad (3.1191)
\end{aligned}$$

Ed infine, circa l'ultimo termine, abbiamo

$$\begin{aligned}
-m\mu Tr \{ \Pi R \Xi \hat{R} \} &= -\frac{m\mu}{4} Tr \{ (m - \mu)(m - \mu) - (m + \mu) \gamma_5 (m + \mu) \gamma_5 + \\
&+ (m - \mu) \gamma_5 \not{N} (m - \mu) \gamma_5 \not{n} - (m + \mu) \not{N} (m + \mu) \not{n} \} = \\
&= -\frac{4m\mu}{4} \{ (m - \mu)^2 - (m + \mu)^2 - (m - \mu)^2(n \cdot N) - (m + \mu)^2(n \cdot N) \} = \\
&= m\mu \{ 4m\mu + 2(m^2 + \mu^2)(n \cdot N) \} = 4m^2\mu^2 + 2m\mu(m^2 + \mu^2)(n \cdot N) \quad (3.1192)
\end{aligned}$$

per cui, combinando insieme i quattro risultati, otteniamo²⁰⁰ infine

$$\begin{aligned}
\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R \Xi v_\nu^{(r)}(k)|^2 &= 2(m^2 + \mu^2)(q \cdot k) - 4m\mu(q \cdot n)(k \cdot N) + \\
&+ 4m\mu(q \cdot k)(n \cdot N) + 2m(m^2 - \mu^2)(k \cdot N) + 2\mu(m^2 - \mu^2)(n \cdot q) \\
&+ 4m^2\mu^2 + 2m\mu(m^2 + \mu^2)(n \cdot N) \quad (3.1194)
\end{aligned}$$

²⁰⁰Come verifica del risultato ottenuto, osserviamo che se sommiamo il risultato per la polar-

da cui

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q) \Pi R \Xi v_\nu^{(r)}(k)|^2 = G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \\
&\cdot \left\{ (m^2 + \mu^2)(q \cdot k) - 2m\mu(q \cdot n)(k \cdot N) + 2m\mu(q \cdot k)(n \cdot N) + \right. \\
&+ m(m^2 - \mu^2)(k \cdot N) + \mu(m^2 - \mu^2)(n \cdot q) + \\
&+ 2m^2\mu^2 + m\mu(m^2 + \mu^2)(n \cdot N) \left. \right\} \quad (3.1195)
\end{aligned}$$

Questo risultato, fornendo $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ in funzione sia dello stato di polarizzazione del leptone carico e che di quello neutro, ci permette di verificare la correlazione diretta che esiste fra le elicità dei due leptoni nel sistema²⁰¹ del CM .

Poniamoci dunque nel CM del decadimento, dove abbiamo

$$k = (\mathcal{E}, b \vec{n}); \quad q = (E, -b \vec{n}) \quad (3.1196)$$

$$\mathcal{E} = \frac{M^2 + \mu^2 - m^2}{2M}; \quad E = \frac{M^2 + m^2 - \mu^2}{2M} \quad (3.1197)$$

$$b = \frac{\sqrt{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2 - 4m^2\mu^2}}{2M} \quad (3.1198)$$

essendo \vec{n} la direzione di volo dell'antineutrino.

Iniziamo fissando l'elicità dell'antineutrino in modo che essa sia positiva ($\lambda = +1$): come è noto, questo implica che il quadrivettore che individua questo stato di spin sia

$$n = \frac{1}{\mu} (b, \mathcal{E} \vec{n}) \quad (3.1199)$$

Determiniamo il valore di $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ dalla (3.1195) imponendo che, per quanto riguarda invece il leptone carico, la sua elicità sia negativa ($\lambda = -1$), i.e.

$$N = -\frac{1}{m} (b, -E \vec{n}) \quad (3.1200)$$

In queste ipotesi, quanto ai prodotti scalari che entrano nella (3.1195), risulta

$$(q \cdot k) = E \mathcal{E} + b^2 = \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2} \quad (3.1201)$$

izzazione dell'antineutrino descritta dal quadrivettore n con quello relativo alla polarizzazione ad essa opposta, descritta dal quadrivettore $-n$, otteniamo la (3.1173), i.e.

$$\sum_{r,s} |\bar{u} \Pi R v|^2 = 4(m^2 + \mu^2)(q \cdot k) + 4m(m^2 - \mu^2)(N \cdot k) + 8m^2\mu^2 \quad (3.1193)$$

²⁰¹Si ricordi che mentre il risultato (3.1195) è invariante di Lorentz, ma la descrizione degli stati di elicità non lo è e necessita quindi di definire il riferimento in cui viene compiuta.

$$(q \cdot n) = \frac{1}{\mu}(E b + b \mathcal{E}) = \frac{b}{\mu}(E + \mathcal{E}) = \frac{bM}{\mu} \quad (3.1202)$$

$$(k \cdot N) = -\frac{1}{m}(\mathcal{E} b + E b) = -\frac{b}{m}(E + \mathcal{E}) = -\frac{bM}{m} \quad (3.1203)$$

$$(n \cdot N) = -\frac{1}{m\mu}(b^2 + E \mathcal{E}) = -\frac{1}{2m\mu}(M^2 - m^2 - \mu^2) \quad (3.1204)$$

per cui, sostituendo nella (3.1195), abbiamo

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (m^2 + \mu^2)(q \cdot k) - 2m\mu(q \cdot n)(k \cdot N) + \right. \\ &+ 2m\mu(q \cdot k)(n \cdot N) + m(m^2 - \mu^2)(k \cdot N) + \mu(m^2 - \mu^2)(n \cdot q) + \\ &+ 2m^2\mu^2 + m\mu(m^2 + \mu^2)(n \cdot N) \left. \right\} = \\ &= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (m^2 + \mu^2) \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2} + 2m\mu \frac{bM}{\mu} \frac{bM}{m} - \right. \\ &- 2m\mu \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2} \frac{1}{2m\mu} (M^2 - m^2 - \mu^2) - m(m^2 - \mu^2) \frac{bM}{m} + \\ &+ \mu(m^2 - \mu^2) \frac{bM}{\mu} + 2m^2\mu^2 - m\mu(m^2 + \mu^2) \frac{1}{2m\mu} (M^2 - m^2 - \mu^2) \left. \right\} = \\ &= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ 2M^2 b^2 - \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} + 2m^2\mu^2 \right\} = \\ &= G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} - 2m^2\mu^2 \right. \\ &- \left. \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} + 2m^2\mu^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1205)$$

La configurazione di spin richiesta è dunque impossibile.

Altrettanto impossibile è la configurazione opposta, in cui entrambe le elicità sono cambiate di segno: la dimostrazione formale di questo segue immediatamente da quanto sopra, visto che gli unici termini lineari in n ed N presenti nella (3.1205) si elidono l'un l'altro (gli altri termini sono funzioni pari dei quadrivettori di spin e dunque non cambiano).

Possono esistere, quindi, solo le configurazioni in cui le elicità λ dei due leptoni sono entrambe positive o entrambe negative.

Iniziamo dal caso in cui siano entrambe positive. Rispetto al caso precedente occorre solo cambiare il segno ad N , ovvero prendere adesso

$$N = \frac{1}{m} (b, -E \vec{n}) \quad (3.1206)$$

cambiando, nella (3.1205), i segni a tutti i prodotti scalari che coinvolgono il solo quadrivettore N . Si ha

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \Big|_{\lambda=+1} = G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (m^2 + \mu^2) \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2} - 2m\mu \frac{bM}{\mu} \frac{bM}{m} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2m\mu \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2} \frac{1}{2m\mu} (M^2 - m^2 - \mu^2) + m(m^2 - \mu^2) \frac{bM}{m} + \\
& + \mu(m^2 - \mu^2) \frac{bM}{\mu} + 2m^2\mu^2 + m\mu(m^2 + \mu^2) \frac{1}{2m\mu} (M^2 - m^2 - \mu^2) \Big\} = \\
& = G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (m^2 + \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) - 2M^2 b^2 + \right. \\
& + \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} + 2bM(m^2 - \mu^2) + 2m^2\mu^2 \Big\} = \\
& = G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (m^2 + \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) - \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} + \right. \\
& + 2m^2\mu^2 + \frac{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2}{2} + 2bM(m^2 - \mu^2) + 2m^2\mu^2 \Big\} = \\
& = G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \\
& \cdot \left\{ (m^2 + \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) + 2bM(m^2 - \mu^2) + 2m^2\mu^2 \right\} \quad (3.1207)
\end{aligned}$$

che, nel caso in cui entrambe le elicità siano invece negative, diventa²⁰²

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} \Big|_{\lambda=-1} & = G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \cdot \\
& \cdot \left\{ (m^2 + \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) - 2bM(m^2 - \mu^2) + 2m^2\mu^2 \right\} \quad (3.1208)
\end{aligned}$$

Le due espressioni differiscono per il termine $2bM(m^2 - \mu^2)$ che ha il segno del valore comune delle due elicità λ .

Nell'ipotesi in cui $M > m, \mu$ possiamo approssimare questo termine nel modo seguente

$$\begin{aligned}
2bM(m^2 - \mu^2) & = (m^2 - \mu^2) \sqrt{(M^2 - m^2 - \mu^2)^2 - 4m^2\mu^2} \approx \\
& \approx (m^2 - \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2m\mu}{m^2 - m^2 - \mu^2} \right)^2 \right] = \\
& = (m^2 - \mu^2)(M^2 - m^2 - \mu^2) - \frac{2m^2\mu^2(m^2 - \mu^2)}{M^2 - m^2 - \mu^2} \quad (3.1209)
\end{aligned}$$

per cui, sostituendo, si ha

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} \Big|_{\lambda=\pm 1} & = G_F^2 |f_\pi|^2 \cos^2 \theta_C \left\{ (M^2 - m^2 - \mu^2) \left[(m^2 + \mu^2) \pm (m^2 - \mu^2) \right] + \right. \\
& + 2m^2\mu^2 \left[1 \mp \frac{m^2 - \mu^2}{M^2 - m^2 - \mu^2} \right] \Big\} \quad (3.1210)
\end{aligned}$$

dalla quale si ricava in particolare che, se $M > m, \mu$ allora, con buona approssimazione, risulta

$$\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2} \Big|_{\lambda=+1}}{\overline{|\mathcal{M}|^2} \Big|_{\lambda=-1}} \approx \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \quad (3.1211)$$

²⁰²Solo i termini lineari in n o N cambiano segno ...

A Appendix: Generalità

A.1 Le unità di misura

Il sistema di unità di misura di cui faremo uso, se non altrimenti specificato, è il sistema *cgs es* (di Gauss) ed esso fornisce i seguenti valori delle costanti universali più comuni ($1 \text{ ues} = \frac{1}{2997924580} \text{ coulomb}$, $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$)

$$\begin{array}{lll} \text{carica dell'elettrone} & e & = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ ues} \\ \text{massa dell'elettrone} & m & = 9.1095 \times 10^{-28} \text{ g} \\ \text{costante di Planck} & \hbar & = \frac{h}{2\pi} = 1.05457266 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} \\ \text{velocità della luce} & c & = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm/s} \end{array}$$

Comunque, siccome questo sistema di unità di misura non è sempre di pratica applicazione in fisica nucleare e subnucleare, in quanto le sue unità di misura sono spesso troppo grandi per la descrizione di sistemi di particelle,

- per quel che riguarda le distanze, useremo spesso il *fermi* (equivalente al *femtometro*, definito dalla relazione

$$1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ Ångstrom};$$

- per l'energia, useremo l'*elettronvolt* (ed i suoi multipli), legato al sistema *cgs* ed *SI* dalla equivalenza

$$1 \text{ eV} = 1.60219 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 1.60219 \cdot 10^{-19} \text{ J};$$

- per le masse delle particelle, invece dei grammi, useremo gli $\frac{\text{eV}}{c^2}$ e relativi multipli, per cui la massa dell'elettrone, per esempio, è

$$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28} \cdot (2.99792458 \cdot 10^{10})^2 \frac{\text{erg}}{c^2} = 8.187 \cdot 10^{-7} \frac{\text{erg}}{c^2} = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

poi, siccome molto spesso, sarà più comodo porre $c = 1$, scriveremo anche

$$m_e = 0.511 \text{ MeV};$$

- per l'impulso, coerentemente con quanto sopra, useremo spesso le unità $\frac{\text{eV}}{c}$ e relativi multipli. In questo modo, un elettrone che abbia una velocità v , possiede un impulso²⁰³

$$p = mv = mc\beta = 0.511\beta \frac{\text{MeV}}{c}.$$

²⁰³Se $\beta \equiv v/c \approx 1$, allora, in realtà, come è dimostrato nel testo, $p = mc\gamma\beta$, dove $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, comunque, è un numero puro e quindi non ha dimensioni.

Nel sistema *cgs es* (di Gauss), le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nel modo seguente

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho; & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; & \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

e la costante di struttura fina α è data da

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{A.2})$$

Per confronto, invece, nel Sistema Internazionale (SI) ed in quello di Heaviside-Lorentz risulta

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi \hbar c} \right)_{LH} = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76}$$

A.2 Le notazioni

La convenzione sugli indici che seguiremo è quella usata nel libro *Relativistic Quantum Mechanics* di Bjorken e Drell. Gli indici greci (α, β, \dots) vanno da 0 a 3, mentre gli indici italiani (i, j, \dots) vanno da 1 a 3.

Il tensore metrico $g_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$ è tale che

$$\delta^{00} = +1 \quad \delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = -1 \quad (\text{A.3})$$

ed il prodotto scalare di due quadrittori p e q è indicato semplicemente con il simbolo pq , oppure (pq) , se il simbolo senza parentesi può dar luogo ad errori di interpretazione

$$pq \equiv p^\mu q_\mu \equiv p^\mu \delta_{\mu\nu} q^\nu \quad (\text{A.4})$$

Dato un quadrittore p , rappresenteremo poi con p^2 la sua lunghezza invariante

$$p^2 \equiv (pp) = p^\mu p_\mu \quad (\text{A.5})$$

che, come è noto, può essere sia positiva che negativa o nulla.

L'operatore di D'Alembert è definito come

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{A.6})$$

Per quanto riguarda, poi, le matrici γ^μ di Dirac, ricordiamo che esse soddisfano le seguenti condizioni generali:

$$(\gamma^0)^2 = I \quad (\text{A.7})$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\text{A.8})$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (\text{A.9})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \quad (\text{A.10})$$

Per definizione poi, se p è un quadrivettore, allora

$$p^\mu \gamma_\mu = p_\mu \gamma^\mu \equiv \not{p} \quad (\text{A.11})$$

La matrice γ_5 è definita dal prodotto

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{A.12})$$

e risulta

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \quad (\text{A.14})$$

$$(\gamma_5)^2 = I \quad (\text{A.15})$$

mentre

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{A.16})$$

Dove necessario, adotteremo la rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ , i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

dove σ_i sono le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

In questa rappresentazione, γ_5 è data da

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Per quanto concerne, poi, le tracce delle matrici γ , risulta

$$a) \text{Tr}\{\gamma^\mu\} = 0 = \text{Tr}\{\gamma_5\} \quad (\text{A.20})$$

$$b) \text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4 \delta^{\mu\nu} \quad (\text{A.21})$$

$$c) \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}\} = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$d) \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} = \delta^{\mu_1 \mu_2} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} - \delta^{\mu_1 \mu_3} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} + \dots \delta^{\mu_1 \mu_{2n}} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}}\} \quad (\text{A.23})$$

da cui si ha

$$e) \text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4(\delta^{\alpha\beta} \delta^{\mu\nu} + \delta^{\alpha\nu} \delta^{\beta\mu} - \delta^{\alpha\mu} \delta^{\beta\nu}) \quad (\text{A.24})$$

Se, fra le γ c'è anche γ_5 , allora

$$f) \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma_5\} = 0 \quad (\text{A.25})$$

ed inoltre si ha

$$g) \text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5\} = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$h) \text{Tr}\{\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} = 4i \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\text{A.27})$$

$$i) \text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5\} = 4i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\text{A.28})$$

dove il tensore completamente antisimmetrico²⁰⁴ $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ è così definito:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} &= +1 && \text{se } \alpha, \beta, \mu, \nu \text{ sono una permutazione pari di } 0, 1, 2, 3 \\ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} &= -1 && \text{se } \alpha, \beta, \mu, \nu \text{ sono una permutazione dispari di } 0, 1, 2, 3 \\ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} &= 0 && \text{negli altri casi} \end{aligned}$$

e perciò, data la definizione di sopra, abbiamo

$$\epsilon_{0123} = 1; \quad \epsilon^{0123} = -1$$

Passiamo adesso alla dimostrazione di quanto sopra affermato.

La (A.20) è del tutto evidente dalle definizioni (A.17) e (A.19).

Passiamo quindi alla (A.21). Per la proprietà della ciclicità della traccia per cui

$$\text{Tr}\{A B\} = \text{Tr}\{B A\}$$

²⁰⁴Si osservi che, a differenza del tensore a tre indici ϵ_{ijk} , una permutazione ciclica non mantiene la parità iniziale. Per esempio, mentre (0123) è ovviamente pari, (1230) è dispari, come ci si può convincere facilmente visto che si passa da (1230) a (0123) con tre permutazioni, i.e.

$$(1230) \rightarrow (1203) \rightarrow (1023) \rightarrow (0123)$$

e per la (A.10), si ha

$$Tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = \frac{1}{2} Tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\} = \frac{1}{2} 2 \delta^{\mu\nu} Tr\{I\} = 4 \delta^{\mu\nu}$$

Veniamo quindi alla (A.22).

Ricordiamo a questo proposito che $\gamma_5^2 = I$, per cui, sempre per la proprietà ciclica della traccia, si ha

$$T \equiv Tr\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}\} = Tr\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma_5 \gamma_5\} = Tr\{\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma_5\}$$

Usando adesso la (A.13), si ha appunto che

$$\begin{aligned} T &= (-1) Tr\{\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma_5 \gamma^{\mu_{2n+1}}\} = (-1)^{2n+1} Tr\{\gamma_5 \gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}\} = -T \\ \Rightarrow T &= 0 \end{aligned}$$

Passiamo ora a dimostrare la (A.23).

Premettiamo a questo riguardo una osservazione. Sia Γ il prodotto di varie matrici γ , allora, visto che dalla (A.10) sappiamo che

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \Gamma = -\gamma^\nu \gamma^\mu \Gamma + 2 \delta^{\mu\nu} \Gamma = -\gamma^\nu \gamma^\mu \Gamma + 2 \delta^{\mu\nu} \Gamma$$

ne segue che risulta

$$Tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu \Gamma\} = -Tr\{\gamma^\nu \gamma^\mu \Gamma\} + 2 \delta^{\mu\nu} Tr\{\Gamma\}$$

Veniamo allora alla (A.23): si ha

$$\begin{aligned} T &\equiv Tr\{\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} = -Tr\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} + 2 \delta^{\mu_1 \mu_2} Tr\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} = \\ &= (-1)^2 Tr\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} - 2 \delta^{\mu_1 \mu_3} Tr\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} + 2 \delta^{\mu_1 \mu_2} Tr\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} = \\ &= (-1)^{2n-1} Tr\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}} \gamma^{\mu_1}\} + 2 \delta^{\mu_1 \mu_2} Tr\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} - \\ &\quad - 2 \delta^{\mu_1 \mu_3} Tr\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} + \dots + 2 \delta^{\mu_1 \mu_{2n}} Tr\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}}\} \end{aligned}$$

ovvero, usando la proprietà ciclica della traccia sul primo termine del secondo membro, si ottiene, finalmente, il risultato (A.23), i.e. appunto che

$$\begin{aligned} Tr\{\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} &= \delta^{\mu_1 \mu_2} Tr\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} - \delta^{\mu_1 \mu_3} Tr\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2n}}\} + \\ &+ \dots + \delta^{\mu_1 \mu_{2n}} Tr\{\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2n-1}}\} \end{aligned}$$

Evidentemente la (A.24) è un caso particolare della (A.23).

Veniamo ora alla (A.25).

Essa discende direttamente dalla proprietà ciclica della traccia, unita alla (A.13).

Infatti si ha

$$\begin{aligned} T &\equiv Tr\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}} \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma_5\} = (-1) Tr\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}} \gamma_5 \gamma^{\mu_{2n+1}}\} = \\ &= (-1)^{2n+1} Tr\{\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}\} = -T \\ \Rightarrow Tr\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}} \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma_5\} &= 0 \end{aligned}$$

Quanto alla (A.26), essa non è così ovvia.

Per dimostrarla occorre ripartire dalla definizione della matrice γ_5 , i.e.

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

ed osservare che da questa discende che

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \quad (\text{A.29})$$

infatti, per la definizione del tensore completamente antisimmetrico $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ solo prodotti di quattro matrici γ con indici differenti fra loro potranno comparire al secondo membro della (A.29). Ne segue allora che gli indici delle stesse costituiranno necessariamente una permutazione degli indici $(0, 1, 2, 3)$. Siccome matrici γ con indici differenti anticommutano, il prodotto delle quattro matrici potrà sempre essere ricondotto al prodotto $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 (-1)^S$ con un numero di scambi S che sarà pari se la permutazione di partenza era pari, mentre sarà dispari nell'altro caso.

Dunque, ciascun addendo della somma $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$ è esattamente uguale a $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. Siccome le permutazioni possibili sono, ovviamente, $4!$, la (A.29) risulta così dimostrata.

Usando un argomento analogo, si prova anche che

$$\gamma_5 \gamma_\tau = \frac{i}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \quad (\text{A.30})$$

Infatti, per quanto detto sopra in relazione alla (A.29), segue evidentemente che

$$\gamma_5 = \frac{i}{3!} \sum_{\mu\nu\rho} \epsilon_{\mu\nu\rho x} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^x \quad (\text{A.31})$$

dove, x è un indice generico su cui, però, non si somma...

Identificando dunque l'indice x con l'indice τ e moltiplicando ambo i membri della (A.31) per γ_τ , senza sommare su questo indice, si ha

$$\gamma_5 \gamma_\tau = \frac{i}{3!} \sum_{\mu\nu\rho} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho (\gamma^\tau \gamma_\tau) \quad (\text{A.32})$$

Però risulta

$$\gamma^0 \gamma_0 = \gamma^1 \gamma_1 = \gamma^2 \gamma_2 = \gamma^3 \gamma_3 = I$$

quindi dalla (A.32) segue immediatamente la (A.30).

Veniamo così a dimostrare la (A.26). Si ha

$$\begin{aligned} Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} &= Tr\{\gamma_\nu \gamma_5 \gamma_\mu\} = Tr\{\gamma_\nu \cdot \frac{i}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho\} = \\ &= \frac{i}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu} Tr\{\gamma_\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho\} \end{aligned}$$

ovvero, per la (A.24)

$$Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} = \frac{i}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu} \{\delta_\nu^\alpha \delta^{\beta\rho} - \delta_\nu^\beta \delta^{\alpha\rho} + \delta_\nu^\rho \delta^{\alpha\beta}\} \quad (A.33)$$

per cui, data la completa antisimmetria del tensore $\epsilon_{\alpha\beta\rho\mu}$, la quantità al secondo membro della (A.33) è evidentemente nulla e dunque la (A.26) è provata.

Dimostriamo infine la (A.27). Occorre dimostrare che

$$Tr\{\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} = 4i \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Consideriamo la matrice $\Gamma = \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu$. Se fra gli indici α, β, μ, ν ci sono almeno due indici uguali, usando le proprietà di anticommutazione fra matrici γ diverse ed il fatto che, qualunque sia l'indice x , $\gamma^x \gamma_x = I$ (non si somma sull'indice x ...) ecco che la matrice Γ si semplifica nel prodotto di solo due matrici gamma (di indice diverso) o, addirittura, nell'identità. Ma siccome

$$Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} = 0 = Tr\{\gamma_5\}$$

la (A.27), in questo caso, risulta soddisfatta.

Supponiamo allora che i quattro indici siano tutti differenti. Evidentemente, in questo caso essi costituiscono una permutazione opportuna di $(0, 1, 2, 3)$. Indichiamo questi indici differenti con $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$: per quanto detto precedentemente, risulta

$$\gamma_5 = i \epsilon_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3} \gamma^{\mu_0} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3}$$

dove è inteso che non si somma su alcun indice. Ne segue allora che

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \cdot \gamma_5 &= i \epsilon_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \cdot \gamma^{\mu_0} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \\ &= i \epsilon_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3} \gamma_{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \cdot \gamma^{\mu_0} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \end{aligned}$$

Ma siccome, per ipotesi, $\mu_0 \neq \mu_1, \mu_0 \neq \mu_2, \mu_0 \neq \mu_3$, e, come abbiamo già osservato, qualunque sia l'indice x $\gamma_x \gamma^x = I$, si ha

$$\begin{aligned} \Gamma &= \gamma_{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \cdot \gamma^{\mu_0} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma^{\mu_0} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = \\ &= \gamma_{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma^{\mu_0} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_0} \gamma^{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = \\ &= -\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \end{aligned}$$

e, continuando, siccome $\mu_1 \neq \mu_2, \mu_1 \neq \mu_3$, ne segue che

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_1} \gamma^{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} = \\ &= \gamma_{\mu_2} \gamma^{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma^{\mu_3} = I \end{aligned}$$

e dunque

$$\gamma_{\mu_0} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \cdot \gamma_5 = i \epsilon_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3} I$$

per cui, finalmente, risulta dimostrato che

$$Tr\{\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \cdot \gamma_5\} = 4i \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$

B Appendix: Cenni di Teoria Classica dei Campi

La teoria dei campi classica nasce come naturale generalizzazione del metodo lagrangiano al caso di infiniti gradi di libertà.



Figure 11: *Joseph Louis de Lagrange (1736-1813)*

Il metodo lagrangiano è un metodo elegante e conciso che si basa su una funzione, la lagrangiana \mathcal{L} appunto, (o l'hamiltoniana \mathcal{H} : si passa dall'una all'altra attraverso una trasformazione di Legendre), funzione delle variabili dinamiche del sistema e delle loro derivate prime. Mediante la lagrangiana viene espressa l'azione S , da cui poi, attraverso il principio di minima azione, si possono ottenere le equazioni del moto e, via il teorema di Noëther, le grandezze fisiche conservate che sono associate a simmetrie continue della lagrangiana.

Ricordiamo che l'azione S è espressa, classicamente, dalla relazione

$$S = \int dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) \quad (\text{B.1})$$

dove $q(t)$ sono appunto le variabili lagrangiane del sistema.

In una teoria di campo relativistica la coordinata temporale e quelle spaziali dovranno essere trattate alla stessa stregua, per cui l'azione S sarà piuttosto

espressa dalla relazione

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (\text{B.2})$$

e la funzione $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ viene chiamata, con ovvio significato, *densità lagrangiana*. Essa è costruita a partire dai campi e dalle loro derivate, ma, se vogliamo che la teoria risultante sia coerente con la relatività ristretta, essa dovrà essere *locale* poichè, siccome in Relatività è esclusa l'azione a distanza, i campi possono interagire l'un l'altro solo nello stesso punto. Non è quindi accettabile che nella densità lagrangiana compaia un campo (o una sua derivata) in un punto x che interagisce con un altro ma in un punto y diverso dal precedente.

Considerazioni generali limitano poi la forma della densità lagrangiana e spesso ne consentono una individuazione pressochè completa.

Per esempio, se vogliamo avere una teoria di campo relativisticamente invariante, e quindi delle equazioni di moto per i campi che siano covarianti, allora la densità lagrangiana²⁰⁵ dovrà essere scalare per trasformazioni di Lorentz ...!

Ricordiamo infine che l'approccio lagrangiano mette in evidenza in modo naturale la profonda connessione esistente fra simmetrie e leggi di conservazione. Chiaramente le simmetrie potranno dipendere dalla particolare teoria considerata, ma una simmetria che dovrà comunque essere posseduta da ogni teoria di campo è quella che discende dal principio di relatività.

Il gruppo di simmetria di base, in questo caso, è il gruppo di Poincarè \mathcal{P} , fatto dalle traslazioni nello spazio tempo (non esiste un punto privilegiato...) e dal gruppo di Lorentz (non esistono riferimenti inerziali privilegiati). I suoi elementi sono solitamente indicati con (a, Λ) , (b, Γ) , ... e soddisfano la legge moltiplicativa

$$(a, \Lambda)(b, \Gamma) = (a + \Lambda b, \Lambda \Gamma)$$

dove a e b sono quadrivettori qualsiasi che descrivono la traslazione dell'origine del sistema di riferimento, mentre Λ, Γ indicano generici elementi del gruppo di Lorentz.

Come vedremo in seguito, l'invarianza in forma della Lagrangiana per trasformazioni di Lorentz comporta la conservazione della somma del momento angolare orbitale e di spin, mentre l'invarianza per traslazioni comporta la conservazione del quadrimpulso.

B.1 Le equazioni di Eulero-Lagrange per campi classici

Supponiamo che la dinamica dei campi classici $\phi^\alpha(x)$ sia descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi^\alpha(x), \partial_\mu \phi^\alpha(x), x) \quad (\text{B.3})$$

²⁰⁵Ricordiamo che la densità hamiltoniana, invece, in generale, essendo la componente 00 del tensore energia-impulso, non è scalare per trasformazioni di Lorentz ...

Questo significa che i campi $\phi^\alpha(x)$ soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Esse, infatti, seguono direttamente dal principio di minima azione, che afferma che la dinamica dei campi è tale per cui *l'integrale di azione*

$$\int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x) d^4x \quad (\text{B.5})$$

valutato partendo da una soluzione compatibile con la dinamica dei campi, è minimo (estremale) per variazioni dei campi $\delta\phi^\alpha$ che si annullano sul bordo Σ del dominio di integrazione D , peraltro arbitrario (aperto in R^4), i.e.

$$\begin{aligned} \delta \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x) d^4x &\equiv 0 \equiv \\ &\equiv \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha + \delta\phi^\alpha, \partial_\mu(\phi^\alpha + \delta\phi^\alpha), x) d^4x - \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x) d^4x \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

con $\delta\phi^\alpha(x) = 0, \forall x \in \Sigma \equiv \hat{D} - D$, essendo \hat{D} la chiusura topologica²⁰⁶ dell'aperto D .

Dalla (B.6) si ha infatti

$$0 = \int_D \left[\delta\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} + \partial_\mu(\delta\phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \right] d^4x \quad (\text{B.7})$$

ma il secondo termine può essere scritto anche come

$$\partial_\mu(\delta\phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} = \partial_\mu \left[\delta\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \right] - \delta\phi^\alpha \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \quad (\text{B.8})$$

Il primo addendo è una quadridivergenza e quindi non fornisce alcun contributo al secondo membro della eq.(B.7) perchè, via il teorema di Gauss²⁰⁷, esso può essere riscritto come

$$\int_\Sigma \delta\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} n_\mu d\sigma$$

²⁰⁶Un sottoinsieme \mathcal{I} di uno spazio topologico \mathcal{T} è *aperto* se ogni suo punto x è tale per cui esiste almeno un suo intorno tutto contenuto in \mathcal{I} .

Un sottoinsieme \mathcal{I} di uno spazio topologico \mathcal{T} è detto *chiuso* se il suo complementare in \mathcal{T} è aperto: esistono sottoinsiemi né aperti né chiusi ...

²⁰⁷Il teorema di Gauss generalizzato in quattro dimensioni afferma che

$$\int_D \partial_\mu F^\mu d^4x \equiv \int_\Sigma F^\mu n_\mu d\sigma \quad (\text{B.9})$$

dove n_μ è il versore di R^4 ortogonale (nella metrica euclidea di R^4) all'elemento di superficie $d\sigma \in \Sigma$. Si osservi, in particolare, che esso non richiede che le quattro funzioni F^μ si trasformino come un campo quadrivettoriale. In effetti, il teorema viene dimostrato semplicemente richiedendo a R^n la sua struttura ordinaria di spazio lineare.

e, per ipotesi, $\delta\phi^\alpha$ è nullo su Σ !

Perciò il principio di minima azione implica che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \left[\delta\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \delta\phi^\alpha \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \right] d^4x = \\ &= \int_D \delta\phi^\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \right] d^4x \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

e per l'arbitrarietà del dominio di integrazione D e delle variazioni dei campi $\delta\phi^\alpha$, questo implica la validità delle equazioni di Eulero-Lagrange (B.4)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \equiv 0 \quad (\text{B.11})$$

In questo modo abbiamo dimostrato che il principio di minima azione implica le equazioni di Eulero-Lagrange per i campi.

Assumendo la validità delle equazioni di Eulero-Lagrange e andando indietro dalla eq.(B.10) alla eq.(B.7), possiamo facilmente dimostrare che anche l'altro verso dell'implicazione è vero, i.e. che le equazioni di Eulero-Lagrange implicano il principio di minima azione²⁰⁸.

B.2 Invarianza in valore

Sia $\mathcal{L}(\phi^\alpha(x), \partial_\mu \phi^\alpha(x), x)$ una Lagrangiana che descrive la dinamica dei campi ϕ^α , $\alpha = 1, \dots, n$. Consideriamo adesso una trasformazione *locale* dei campi e delle coordinate, che ammette inversa, i.e. tale che

$$x \leftrightarrow x' : x' = X'(x); \quad (\text{B.12})$$

$$: x = X(x') \quad (\text{B.13})$$

$$\phi^\alpha(x) \leftrightarrow \psi^\alpha(x') : \psi^\alpha(x') = \Psi^\alpha(\phi(x)) \quad (\text{B.14})$$

$$: \phi^\alpha(x) = \Phi^\alpha(\psi(x')) \quad (\text{B.15})$$

Assumiamo inoltre che lo Jacobiano J della trasformazione di coordinate $J = ||\partial_\mu X^\nu||$ sia costante e che le funzioni $X, X', \Phi^\alpha, \Psi^\alpha$ siano derivabili.

Vogliamo vedere se la dinamica dei campi trasformati ψ^α può ancora essere ottenuta dal principio di minima azione, i.e. da una opportuna lagrangiana.

Iniziamo con il definire la funzione \mathcal{L}' seguente

$$\mathcal{L}'(\psi^\beta, \partial'_\nu \psi^\beta, x') \equiv \mathcal{L}(\Phi^\alpha(\psi), \partial_\mu \Phi^\alpha(\psi), X(x')) \quad (\text{B.16})$$

²⁰⁸Si osservi che, da quanto sopra detto, discende anche la conclusione secondo cui se due Lagrangiane differiscono solo per una quadridivergenza, esse sono equivalenti nel senso che descrivono la stessa dinamica, come pure che, essendo le equazioni di Eulero-Lagrange omogenee, due Lagrangiane che differiscono solo per un fattore moltiplicativo sono, di nuovo, equivalenti.

Per definizione, la funzione \mathcal{L}' prende, ovunque, nelle variabili trasformate, lo stesso valore assunto dalla Lagrangiana originale \mathcal{L} , per i campi e le coordinate non trasformate.

Facciamo osservare che, date le relazioni biunivoche (B.14), (B.15) fra i campi ϕ e ψ , $\hat{\psi}$ costituirà una possibile descrizione della dinamica dei campi ψ se e solo se potremo scrivere $\hat{\psi} = \Psi(\hat{\phi})$, con $\hat{\phi}$ una opportuna soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange per i campi ϕ ! Se dimostriamo che, per qualunque $\hat{\psi}$ che descrive la dinamica del sistema in un dato (arbitrario) dominio D' , la variazione attorno a questa soluzione dell'*integrale di azione*, costruito usando \mathcal{L}' come Lagrangiana, è effettivamente nulla quando i campi vengono cambiati di un qualsiasi $\delta\psi$, purchè $\delta\psi = 0$ risulti nullo sulla frontiera del dominio di integrazione D' , allora avremo dimostrato che anche la dinamica dei campi ψ può essere derivata dal principio di minima azione e che \mathcal{L}' è una²⁰⁹ possibile Lagrangiana che ne descrive la dinamica.

Questo teorema implica l'invarianza *in valore* della Lagrangiana sotto trasformazioni locali.

Dimostrazione

Sia $\hat{\phi}$ una qualunque soluzione in un opportuno dominio D , e sia $\hat{\psi} = \Psi(\hat{\phi})$: i campi $\hat{\psi}$ sono, evidentemente, definiti nel dominio $D' = X'(D)$.

Valutiamo quanto vale la variazione

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'(\psi^\beta, \partial'_\nu \psi^\beta, x') d^4 x' \quad (\text{B.17})$$

quando i campi ψ^β vengono variati intorno a $\hat{\psi}^\beta$ di un qualsiasi $\delta\psi^\beta$ tale che $\delta\psi^\beta$ sia nullo sulla frontiera Σ' del dominio di integrazione D' . Evidentemente si ha

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}' d^4 x' = \int_{D'} \left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^\beta} \delta\psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial'_\nu \psi^\beta)} \partial'_\nu (\delta\psi^\beta) \right] d^4 x'$$

Comunque, data la definizione di \mathcal{L}' , risulta

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial (\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta}$$

mentre

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial'_\nu \psi^\beta)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial (\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial (\partial'_\nu \psi^\beta)}$$

²⁰⁹La Lagrangiana non è unica poichè, come abbiamo già detto, le equazioni dei campi non cambiano se \mathcal{L} viene moltiplicata per una qualunque costante non nulla, sommata ad una qualsiasi quantità reale fissa o, più generalmente sommata ad una quadridivergenza ...

perciò

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}' d^4 x' = \int_{D'} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial (\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta} \right] \delta \psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial (\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial (\partial'_\nu \psi^\beta)} \partial'_\nu (\delta \psi^\beta) \right\} d^4 x'$$

ma

$$\partial_\mu \Phi^\alpha = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \partial'_\nu \psi^\beta \partial_\mu X'^\nu \Rightarrow \frac{\partial (\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial (\partial'_\nu \psi^\beta)} = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \partial_\mu X'^\nu$$

e perciò

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}' d^4 x' = \int_{D'} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial (\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta} \right] \delta \psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \partial_\mu X'^\nu \partial'_\nu (\delta \psi^\beta) \right\} d^4 x'$$

Comunque, siccome chiaramente risulta

$$\partial_\mu X'^\nu \partial'_\nu \equiv \partial_\mu$$

si ha

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}' d^4 x' = \int_{D'} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial (\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta} \right] \delta \psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \partial_\mu (\delta \psi^\beta) \right\} d^4 x'$$

Consideriamo adesso il secondo termine dell'integrale di sopra:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \partial_\mu (\delta \psi^\beta) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \delta \psi^\beta \right] - \delta \psi^\beta \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right]$$

L'integrale del primo termine può essere riscritto come

$$\int_{D'} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \delta \psi^\beta \right] d^4 x' = \int_D \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \delta \psi^\beta \right] J(x) d^4 x$$

ma dato che abbiamo assunto che lo Jacobiano $J(x)$ sia costante, l'integrando risulta essere una quadridivergenza, quando espressa come funzione di x e dunque, via il teorema di Gauss, può essere trasformata in un integrale di superficie sulla frontiera Σ del dominio D . Comunque, poichè le funzioni X e X' sono analitiche, la frontiera di D è mandata nella frontiera di D' e viceversa, i.e. $x \in \Sigma \leftrightarrow x' \in \Sigma'$. Quindi, le variazioni $\delta \psi$ che per ipotesi si annullano su Σ' , sono nulle anche quando $x \in \Sigma$ e, di conseguenza, l'integrale di sopra è nullo. In conclusione, risulta

$$\begin{aligned} \delta \int_{D'} \mathcal{L}' d^4 x' &= \int_{D'} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial (\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta} \right] \delta \psi^\beta - \right. \\ &\quad \left. - \delta \psi^\beta \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right] \right\} d^4 x' \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Inoltre

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right] = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \partial_\mu \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \quad (\text{B.19})$$

e poichè

$$\partial_\mu \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} = \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta}$$

ecco che il secondo addendo dell'espressione (B.19) cancella il secondo addendo nella prima parentesi quadra della (B.18), per cui finalmente otteniamo

$$\begin{aligned} \delta \int_{D'} \mathcal{L}' d^4 x' &= J \int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right\} \delta \psi^\beta d^4 x \\ &= J \int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \right\} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \delta \psi^\beta d^4 x \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

D'altronde la quantità in parentesi graffa è nulla, dato che i campi ϕ verificano per ipotesi le equazioni di Eulero-Lagrange; dunque risulta così dimostrato che il principio di minima azione è valido anche per i campi ψ quando si prenda \mathcal{L}' come loro Lagrangiana.

Esempio

Supponiamo che ϕ sia un campo scalare e consideriamo la trasformazione di coordinate lineare e locale, descritta dalla generica matrice non degenera M . Per definizione, si ha

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow x' &: x' = Mx \Rightarrow x'^\alpha = M^\alpha_\beta x^\beta; \\ &: x = M^{-1}x' \Rightarrow x^\alpha = (M^{-1})^\alpha_\beta x'^\beta; \\ \phi(x) \leftrightarrow \psi(x') &: \psi(x') \equiv \Psi(\phi(x)) = \phi(x) \\ &: \phi(x) \equiv \Phi(\psi(x')) = \psi(x') \end{aligned}$$

Chiaramente lo Jacobiano J della trasformazione di coordinate è costante (risultando $J = ||M||$) e le funzioni Φ, Ψ sono le funzioni *identiche*.

Partiamo dalla seguente Lagrangiana libera che, come vedremo, descrive il campo scalare di massa m

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 \quad (\text{B.21})$$

A causa dell'invarianza *in valore* della Lagrangiana sotto trasformazioni locali, secondo la equazione (B.16), la dinamica del campo trasformato ψ è descritta dalla nuova funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) = \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu \Phi(\psi)) \quad (\text{B.22})$$

Ma

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) &= \psi ; \\ \partial_\mu \Phi(\psi) &= \partial_\mu \psi(x') = \partial'_\nu \psi \partial_\mu X^\nu = M_{\cdot\mu}^\nu \partial'_\nu \psi \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo nella (B.22), otteniamo

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) = (M_{\cdot\mu}^\nu \partial'_\nu \psi) (M_{\cdot\rho}^\sigma \partial'_\sigma \psi) \delta^{\rho\mu} - m^2 \psi^2 \quad (\text{B.23})$$

dove $\delta^{\nu\mu} = g^{\nu\mu} = g_{\nu\mu} = \delta^{\nu\mu}$ è l'elemento $(\nu\mu)$ del tensore metrico di Minkowski. Con un poco di semplice algebra e definendo

$$M_{\cdot\tau}^\mu \equiv M_{\cdot\rho}^\sigma \delta^{\rho\mu} \delta_{\sigma\tau} \quad (\text{B.24})$$

abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) &= M_{\cdot\mu}^\nu M_{\cdot\rho}^\sigma \delta^{\rho\mu} (\partial'_\nu \psi) (\partial'_\sigma \psi) - m^2 \psi^2 \\ &= M_{\cdot\mu}^\nu M_{\cdot\rho}^\sigma \delta^{\rho\mu} \delta_{\sigma\tau} (\partial'_\nu \psi) (\partial'^\tau \psi) - m^2 \psi^2 \\ &\equiv M_{\cdot\mu}^\nu M_{\cdot\tau}^\mu (\partial'_\nu \psi) (\partial'^\tau \psi) - m^2 \psi^2 \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Da quanto precede, concludiamo dunque che questa è la nuova Lagrangiana che descrive la dinamica del campo trasformato ψ , ed essa coincide formalmente con quella di partenza se e solo se accade che

$$M_{\cdot\mu}^\nu M_{\cdot\tau}^\mu = \delta_\tau^\nu$$

B.3 Invarianza in forma

Se, nell'esempio precedente, la matrice M è una matrice di Lorentz e dunque descrive una trasformazione omogenea di coordinate che lega due riferimenti inerziali fra loro, allora, poichè

$$(M)_{\mu\alpha} \equiv M_{\cdot\alpha}^\mu \quad (M^{-1})_{\beta\mu} \equiv M_{\cdot\mu}^\beta \quad \Rightarrow \quad M_{\cdot\alpha}^\mu M_{\cdot\mu}^\beta = \delta_\alpha^\beta$$

la Lagrangiana \mathcal{L}' diventa dunque, come abbiamo visto

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) = (\partial'_\nu \psi) (\partial'^\nu \psi) - m^2 \psi^2 \quad (\text{B.26})$$

i.e., la Lagrangiana \mathcal{L}' dipende da ψ con la stessa dipendenza funzionale secondo la quale \mathcal{L} dipendeva da ϕ .

In questo caso, diciamo che la Lagrangiana è invariante in forma sotto la trasformazione locale considerata. Chiaramente, se questo accade, la dinamica del campo ψ è la stessa di quella del campo ϕ , i.e. le equazioni di moto per ψ sono formalmente identiche a quelle per ϕ .

Si noti, comunque, che, mentre l'invarianza in forma della Lagrangiana implica che le equazioni di moto restino formalmente le stesse, l'inverso non è a priori vero. Per rendercene conto, consideriamo la Lagrangiana di un campo scalare, libero ma di massa nulla

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \quad (\text{B.27})$$

ed effettuiamo una trasformazione locale che sia una dilatazione uniforme delle coordinate (trasformazione di scala),

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow x' & : x' = X'(x) = \lambda x \Rightarrow x'^\alpha = \lambda x^\alpha; \\ & : x = X(x') = \lambda^{-1} x' \Rightarrow x^\alpha = \lambda^{-1} x'^\alpha; \\ \phi(x) \leftrightarrow \psi(x') & : \psi(x') \equiv \Psi(\phi(x)) = \phi(x) \\ & : \phi(x) \equiv \Phi(\psi(x')) = \psi(x') \end{aligned}$$

Chiaramente lo Jacobiano J della trasformazione di coordinate è costante, essendo $J = ||\lambda^4||$, così come le funzioni Φ, Ψ sono, di nuovo, le funzioni *identiche*. Si ha

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) & = \psi ; \\ \partial_\mu \Phi(\psi) & = \partial_\mu \psi(x') = \partial'_\nu \psi \partial_\mu X'^\nu = \lambda \partial'_\nu \psi \end{aligned}$$

perciò la nuova Lagrangiana per il campo ψ risulta

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) = \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu \Phi(\psi)) = \lambda^2 (\partial'_\nu \psi)(\partial'^\nu \psi) \quad (\text{B.28})$$

Poichè le equazioni di Eulero-Lagrange sono omogenee in \mathcal{L} , il fattore λ^2 in (B.28) è irrilevante, per cui la dinamica del campo ψ è ancora descritta dall'equazione di Klein-Gordon per massa nulla, così come per il campo ϕ .

Comunque, la Lagrangiana (B.27) non è invariante in forma sotto la trasformazione locale di cui sopra !

B.3.1 Alcuni esempi di lagrangiane

- **Equazione di Schrödinger**

Anche l'equazione di Schrödinger può essere ottenuta, via il principio di minima azione, da una densità Lagrangiana, bilineare nella funzione d'onda e nelle sue derivate.

Prendiamo infatti la seguente densità lagrangiana²¹⁰

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_i \psi^*)(\partial^i \psi) - \psi^* V \psi \quad (\text{B.29})$$

Dalla equazione del moto per ψ^*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} = 0 \quad (\text{B.30})$$

essendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= \frac{i\hbar}{2} \partial_0 \psi - V \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^*)} &= -\frac{i\hbar}{2} \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi^*)} &= \frac{\hbar^2}{2m} \partial^i \psi \end{aligned}$$

ne segue l'equazione²¹¹

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{2} \partial_0 \psi - V \psi - \partial_0 \left(-\frac{i\hbar}{2} \psi \right) - \partial_i \left(\frac{\hbar^2}{2m} \partial^i \psi \right) &= 0 \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

che è appunto l'equazione di Schrödinger per il campo ψ .

Procedendo a partire dalla equazione analoga alla (B.30) relativa al campo ψ , otteniamo l'equazione del moto per ψ^* . Essendo comunque la lagrangiana (B.29) evidentemente reale, l'equazione per ψ^* che così si ottiene è semplicemente la complessa coniugata della (B.31), i.e.

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V \psi^* \quad (\text{B.32})$$

²¹⁰Per il potenziale V si è assunto che esso sia reale e funzione solo della posizione.

²¹¹Si ricordi che $\partial_i = -\partial^i$ e quindi che $\partial_i \partial^i = -\nabla^2$.

- **Campo scalare di massa m**

La densità lagrangiana²¹² che descrive l'evoluzione libera del campo scalare, neutro, di massa m , come abbiamo già avuto modo di anticipare, è

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 \quad (\text{B.33})$$

Sostituendo infatti la (B.33) nella (B.11), l'equazione di moto²¹³ che si ottiene è

$$-2m^2 \phi - 2\partial_\mu(\partial^\mu \phi) = 0 \Leftrightarrow \square \phi + m^2 \phi = 0 \quad (\text{B.34})$$

i.e. appunto l'equazione di Klein-Gordon per il campo scalare di massa m .

Se il campo è carico, allora esso può essere descritto solo in termini di un campo intrinsecamente complesso. La densità lagrangiana, che comunque è reale, in questo caso, è

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^* \quad (\text{B.35})$$

la quale, via il principio di minima azione, implica che sia il campo ϕ come il suo complesso coniugato ϕ^* soddisfino entrambi l'equazione di Klein-Gordon di massa m .

- **Campo vettoriale di massa m**

La densità lagrangiana che descrive la dinamica libera del campo vettoriale neutro di massa m è:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\nu)(\partial^\mu \phi_\nu) - m^2 \phi_\nu \phi^\nu \quad (\text{B.36})$$

Usando questa densità lagrangiana nella (B.11), otteniamo

$$-2m^2 \phi_\nu - 2\partial_\mu(\partial^\mu \phi_\nu) = 0 \Leftrightarrow \square \phi_\nu + m^2 \phi_\nu = 0 \quad (\text{B.37})$$

Nel caso particolare in cui il campo ϕ^ν abbia massa nulla e la sua quadridivergenza sia anch'essa nulla, come accade, per esempio, nel caso del fotone ($\phi^\mu \rightarrow A^\mu$), allora, ponendo

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu \quad (\text{B.38})$$

²¹²Come abbiamo già avuto modo di osservare, la lagrangiana non è mai unica, essendo definita a meno di una quadridivergenza e di una costante moltiplicativa non nulla. In questo senso sarebbe più corretto parlare di *"una lagrangiana che descrive ..."*.

Resta il fatto che la lagrangiana (B.33) è quella più semplice ed in questo senso risulta *"la lagrangiana ..."*

²¹³Useremo qui e nel seguito l'operatore di D'Alembert \square nella sua definizione (A.6)

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial_0^2 - \nabla^2$$

per ottenere le stesse equazioni del moto, possiamo usare anche la Lagrangiana seguente

$$\mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha) = (\partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu)(\partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu) \equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{B.39})$$

infatti, dalla (B.11), abbiamo

$$0 - \partial_\mu [2(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})] \equiv 0 \quad (\text{B.40})$$

da cui, usando la proprietà di antisimmetria di $F^{\mu\nu}$ e l'ipotesi che la quadridivergenza dei campi sia nulla, otteniamo appunto

$$4 \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \square \phi^\nu - \partial^\nu \partial_\mu \phi^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \square \phi^\nu = 0 \quad (\text{B.41})$$

Se il campo è carico, analogamente al caso scalare, la densità lagrangiana è

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\nu)(\partial^\mu \phi_\nu^*) - m^2 \phi_\nu \phi^{*\nu} \quad (\text{B.42})$$

E' interessante osservare che, usando invece la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* - m^2 \phi_\nu \phi^{*\nu} \quad (\text{B.43})$$

nel caso in cui $m \neq 0$, la condizione di Lorentz discende direttamente dalle equazioni del moto che, per il campo ϕ_ν , sono

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 \phi_\nu = 0 \Leftrightarrow \square \phi_\nu + m^2 \phi_\nu - \partial_\nu \partial^\mu \phi_\mu = 0 \quad (\text{B.44})$$

Queste sembrano diverse dall'equazione di Klein-Gordon, ma non lo sono, infatti, derivandole rispetto a ∂^ν ed usando la proprietà di antisimmetria di $F_{\mu\nu}$, segue immediatamente che deve altresì essere

$$\partial^\nu \phi_\nu = 0 \quad (\text{B.45})$$

e dunque che il campo deve soddisfare sia la gauge di Lorentz che l'equazione di Klein-Gordon.

• Campo di Dirac

La densità lagrangiana che descrive l'evoluzione libera del campo classico di Dirac è:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi \quad (\text{B.46})$$

Usando questa Lagrangiana, derivando rispetto a $\bar{\psi}$, dalla (B.11) otteniamo l'equazione di Dirac per il campo ψ

$$-m \psi - \partial_\mu (-i \gamma^\mu \psi) = 0 \Leftrightarrow (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (\text{B.47})$$

mentre, derivando rispetto a ψ , otteniamo l'equazione di Dirac per $\bar{\psi}$

$$-m \bar{\psi} - \partial_\mu (i \bar{\psi} \gamma^\mu) = 0 \Leftrightarrow i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi} = 0 \quad (\text{B.48})$$

B.4 Il teorema di Noëther

Abbiamo visto che, sotto ipotesi molto generali, una trasformazione locale lascia la densità lagrangiana invariante in valore, i.e.

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) = \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu \Phi(\psi)) \quad (\text{B.49})$$

In alcuni casi, può anche risultare invariante in forma, i.e.

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) = \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu \Phi(\psi)) = \mathcal{L}(\psi, \partial'_\nu \psi) \quad (\text{B.50})$$

In questo caso diciamo che la trasformazione locale agisce come una simmetria per il sistema fisico che stiamo considerando. Una delle conseguenze, come abbiamo già messo in evidenza, è che le equazioni di Eulero-Lagrange per i campi trasformati ψ coincidono formalmente con le equazioni del moto per i campi ϕ .

Se la Lagrangiana è *invariante in forma* sotto un gruppo di Lie di trasformazioni ad m parametri, allora il teorema di Noëther afferma che ci sono m quadricorrenti conservate.



Figure 12: *Emmy Amalie Noether (1882-1935)*

Prima di dimostrare il teorema, ricordiamo che un gruppo di Lie ad m parametri è un gruppo in cui i suoi elementi g possono essere descritti analiticamente in termini di m parametri reali, i.e. $g = g(\omega_1, \dots, \omega_m)$.

Per definizione, la parametrizzazione è scelta in modo che $g(0, \dots, 0)$ sia l'elemento neutro del gruppo, i.e. $g(0, \dots, 0) = I$. Comunque, quello che importa per la descrizione del gruppo, sono i suoi generatori G_a , definiti come

$$\lim_{\omega_a \rightarrow 0} \frac{\partial g(0, \dots, \omega_a, \dots, 0)}{\partial \omega_a} = G_a, \quad a = 1, \dots, m \quad (\text{B.51})$$

Dalla teoria dei gruppi di Lie sappiamo che questi generatori soddisferanno regole di commutazione del tipo

$$[G_a, G_b] = \lambda_{abc} G_c$$

dove i coefficienti λ_{abc} sono appunto le costanti di struttura dell'algebra di Lie del gruppo considerato.

Evidentemente, in un gruppo di Lie, una trasformazione locale infinitesima può essere scritta come²¹⁴

$$g(\omega_a) \simeq I + \omega_a G_a$$

dove (ω_a) rappresentano, da adesso in poi, quantità reali ma infinitesime.

Supponiamo allora di avere i campi $\phi^\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, n$ ed assumiamo che siano definite delle leggi di trasformazione locali dei campi stessi, sotto un opportuno gruppo di Lie, del tipo

$$x \rightarrow x' : x'^\mu = x^\mu + \Lambda_a^\mu(x) \omega_a \equiv x^\mu + \delta x^\mu \quad (\text{B.52})$$

$$\phi^\alpha(x) \rightarrow \psi^\alpha(x') : \psi^\alpha(x') = (\delta_\beta^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \omega_a) \phi^\beta(x) \quad (\text{B.53})$$

Evidentemente, sia le matrici Γ_a (matrici $n \times n$), che le funzioni $\Lambda_a(x)$, costituiscono una rappresentazione dei generatori del gruppo di Lie²¹⁵.

²¹⁴Qui noi usiamo il simbolo $+$ per indicare l'operatore di composizione interna definito nel gruppo.

²¹⁵Ricordiamo che, per definizione, il gruppo di Lie è tale che

$$g(\omega)g(\bar{\omega}) - g(\bar{\omega})g(\omega) \simeq \omega_a \bar{\omega}_b [G_a, G_b] \equiv \omega_a \bar{\omega}_b \lambda_{abc} G_c$$

Questa struttura di gruppo impone dei vincoli sulle funzioni Λ . Si ha

$$\begin{aligned} x \rightarrow x' &\equiv g(\omega)x = x^\mu + \Lambda_a^\mu(x) \omega_a \\ x' \rightarrow x'' &\equiv g(\bar{\omega})x' = x'^\mu + \Lambda_b^\mu(x') \bar{\omega}_b = x^\mu + \Lambda_a^\mu(x) \omega_a + \Lambda_b^\mu(x + \Lambda(x)\omega) \bar{\omega}_b \end{aligned}$$

e perciò

$$\begin{aligned} x'' &= g(\bar{\omega})g(\omega)x = x^\mu + \Lambda_a^\mu(x) \omega_a + \Lambda_b^\mu(x) \bar{\omega}_b + \partial_\nu \Lambda_b^\mu(x) \Lambda_a^\nu(x) \omega_a \bar{\omega}_b \\ \tilde{x}'' &= g(\omega)g(\bar{\omega})x = x^\mu + \Lambda_b^\mu(x) \bar{\omega}_b + \Lambda_a^\mu(x) \omega_a + \partial_\nu \Lambda_a^\mu(x) \Lambda_b^\nu(x) \bar{\omega}_b \omega_a \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$[g(\omega)g(\bar{\omega}) - g(\bar{\omega})g(\omega)]x = \omega_a \bar{\omega}_b [\partial_\nu \Lambda_a^\mu(x) \Lambda_b^\nu(x) - \partial_\nu \Lambda_b^\mu(x) \Lambda_a^\nu(x)]$$

Supponiamo ora che la dinamica dei campi sia descritta dalla densità lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x)$ ed assumiamo che essa sia invariante in forma sotto il gruppo di Lie delle trasformazioni di cui sopra. Questo significa che essa lo sarà, in particolare, per trasformazioni infinitesime.

Consideriamo allora l'integrale di azione

$$\int_{D'} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi, x') d^4 x'$$

A causa dell'invarianza in valore della Lagrangiana, questo è uguale all'integrale di azione per i campi non trasformati, calcolato nel dominio non trasformato D , usando la Lagrangiana originale, i.e.

$$\int_{D'} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi, x') d^4 x' = \int_D \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) d^4 x$$

Comunque, essendo \mathcal{L} invariante in forma, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, per cui si ha

$$\int_{D'} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi, x') d^4 x' = \int_D \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) d^4 x = \int_{D'} \mathcal{L}(\psi, \partial'_\nu \psi, x') d^4 x'$$

dove l'uguaglianza fra il primo ed il secondo membro vale a causa dell'invarianza in valore, mentre quella fra il primo ed il terzo vale a causa dell'invarianza in forma della Lagrangiana.

Siccome la trasformazione è infinitesima, possiamo scrivere

$$\int_{D'} \mathcal{L}(\psi, \partial'_\nu \psi, x') d^4 x' = \int_D \mathcal{L}(\psi, \partial_\nu \psi, x) d^4 x + \int_\Sigma \mathcal{L}(\phi, \partial_\nu \phi, x) \delta x^\rho d\sigma_\rho$$

dove Σ è la frontiera del dominio D e nel secondo integrale abbiamo sostituito ψ con ϕ , approssimando così la Lagrangiana all'ordine zero, dato il fatto che l'integrando contiene il fattore δx^ρ , che è già infinitesimo del primo ordine.

Allo stesso ordine di approssimazione, si ha anche che

$$\begin{aligned} \psi^\alpha(x) &= \psi^\alpha(x') - \partial_\mu \phi^\alpha \delta x^\mu = \phi^\alpha(x) + \Gamma_{a\beta}^\alpha \omega_a \phi^\beta(x) - \partial_\mu \phi^\alpha(x) \delta x^\mu \\ &= \phi^\alpha(x) + \left(\Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta(x) - \partial_\mu \phi^\alpha(x) \Lambda_a^\mu(x) \right) \omega_a \equiv \phi^\alpha(x) + \bar{\delta} \phi^\alpha(x) \end{aligned}$$

che deve essere compatibile con

$$\omega_a \bar{\omega}_b \lambda_{abc} G_c \equiv \omega_a \bar{\omega}_b \lambda_{abc} \Lambda_c^\mu(x)$$

per cui otteniamo

$$\partial_\nu \Lambda_a^\mu(x) \Lambda_b^\nu(x) - \partial_\nu \Lambda_b^\mu(x) \Lambda_a^\nu(x) = \lambda_{abc} \Lambda_c^\mu(x) \quad (\text{B.54})$$

In modo analogo, possiamo dimostrare che deve essere

$$\Gamma_{b\beta}^\alpha \Gamma_{a\gamma}^\beta - \Gamma_{a\beta}^\alpha \Gamma_{b\gamma}^\beta \equiv (\Gamma_b \Gamma_a)_{\cdot\gamma}^\alpha - (\Gamma_a \Gamma_b)_{\cdot\gamma}^\alpha = [\Gamma_a, \Gamma_b]_{\cdot\gamma}^\alpha = \lambda_{abc} \Gamma_{c\gamma}^\alpha \quad (\text{B.55})$$

e perciò

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{D'} \mathcal{L}(\psi^\alpha, \partial'_\nu \psi^\alpha, x') d^4 x' - \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha, x) d^4 x = \\
&= \int_D \mathcal{L}(\psi^\alpha, \partial_\nu \psi^\alpha, x) d^4 x + \int_\Sigma \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha, x) \delta x^\rho d\sigma_\rho - \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha, x) d^4 x = \\
&= \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha + \bar{\delta} \phi^\alpha, \partial_\nu (\phi^\alpha + \bar{\delta} \phi^\alpha), x) d^4 x + \int_\Sigma \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha, x) \delta x^\rho d\sigma_\rho - \\
&- \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha, x) d^4 x
\end{aligned}$$

da cui, prendendo la differenza fra il primo ed il terzo addendo e ritrasformando all'indietro, via il teorema di Gauss, l'integrale di superficie su Σ in un integrale di volume su D , si ottiene

$$0 = \int_D \left\{ \bar{\delta} \phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} + \partial_\mu (\bar{\delta} \phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right\} d^4 x \quad (\text{B.56})$$

Comunque, dalle equazioni di Eulero-Lagrange per i campi ϕ , sappiamo che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} = \partial_\mu \frac{\mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)}$$

perciò

$$\bar{\delta} \phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} + \partial_\mu (\bar{\delta} \phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} = \bar{\delta} \phi^\alpha \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} + \partial_\mu (\bar{\delta} \phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} = \partial_\mu \left[\bar{\delta} \phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} \right]$$

Usando questo risultato nella equazione (B.56), finalmente otteniamo

$$0 = \int_D \partial_\mu \left\{ \bar{\delta} \phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} + \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} d^4 x$$

Poichè il dominio D è qualsiasi, questo risultato implica che

$$\partial_\mu \left\{ \bar{\delta} \phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} + \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} = 0$$

Ma siccome

$$\begin{aligned}
\overline{\delta \phi^\alpha} &\equiv \left(\Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta(x) - \partial_\nu \phi^\alpha(x) \Lambda_a^\nu(x) \right) \omega_a \\
\delta x^\mu &\equiv \Lambda_a^\mu(x) \omega_a
\end{aligned}$$

abbiamo

$$\partial_\mu \left\{ \left[\Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta(x) - \partial_\nu \phi^\alpha(x) \Lambda_a^\nu(x) \right] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} + \mathcal{L} \Lambda_a^\mu(x) \right\} \omega_a = 0 \quad (\text{B.57})$$

Poichè i parametri di Lie ω_a sono indipendenti, questo risultato significa che, se definiamo (abbiamo cambiato di segno ...) le m quadricorrenti seguenti

$$\Theta_a^\mu(x) \equiv \left[-\Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta(x) + \partial_\nu \phi^\alpha(x) \Lambda_a^\nu(x) \right] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \Lambda_a^\mu(x) \quad (\text{B.58})$$

allora ognuna di esse è separatamente conservata, i.e.

$$\partial_\mu \Theta_a^\mu = 0 \quad (\text{B.59})$$

e questo è appunto quanto afferma il teorema di Emmy Noëther !

B.4.1 L'invarianza sotto il gruppo di Poincaré

Iniziamo supponendo che la densità lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha)$ sia invariante in forma per traslazioni spazio-temporali (e per questo è sufficiente che non dipenda esplicitamente dalle coordinate, ma solo attraverso i campi e le loro derivate).

Il gruppo di Lie di simmetria è dunque il gruppo delle traslazioni e le trasformazioni da considerare sono le seguenti

$$\begin{aligned} x \rightarrow x' : \quad x'^\mu &= x^\mu + \delta_a^\mu \omega^a \\ \phi^\alpha(x) &\rightarrow \psi^\alpha(x') = \delta_\beta^\alpha \phi^\beta(x) \end{aligned}$$

Nelle notazioni usate per provare il teorema di Noëther, abbiamo quindi

$$\Gamma_{a\beta}^\alpha = 0; \quad \Lambda_a^\mu(x) = \delta_a^\mu$$

dove a è un indice che va da 0 a 3, descrivendo i quattro gradi di libertà di traslazione. Dal teorema prima dimostrato, abbiamo che le quadricorrenti conservate, individuate dall'indice $a \equiv \nu$, sono allora

$$\Theta_\nu^\mu = \partial_\rho \phi^\alpha \delta_\nu^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu = \partial_\nu \phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu \quad (\text{B.60})$$

Abbassando l'indice μ con il tensore metrico, i.e. definendo $\Theta_{\mu\nu} \equiv \Theta_\nu^\tau \delta_{\mu\tau}$ ovvero

$$\Theta_{\mu\nu}(x) = [\partial_\rho \phi^\alpha(x) \delta_\nu^\rho] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = \partial_\nu \phi^\alpha(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \quad (\text{B.61})$$

concludiamo che le quattro "correnti" individuate dall'indice $\nu = 0, \dots, 3$, soddisfano separatamente la condizione di conservazione $\partial^\mu \Theta_{\mu\nu}(x) = 0$ e dunque, definendo

$$P_\nu(t) \equiv \int d^3x \Theta_{0\nu}(x) \quad (\text{B.62})$$

risulta che questa "carica" è conservata nel tempo, ovvero è una costante del moto.

Non è difficile riconoscere nella (B.61) la definizione del tensore energia-impulso²¹⁶

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} \partial_\nu \phi^\alpha(x) - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \quad (\text{B.63})$$

per cui il teorema di Noëther mostra come la conservazione del quadrimpulso in un sistema isolato sia la conseguenza dell'invarianza (simmetria) per traslazioni della lagrangiana del sistema considerato.

Prima di continuare, osserviamo che, usando il tensore (B.63), possiamo riscrivere in modo più semplice anche la (B.58), mettendo in evidenza, nella corrente conservata, il contributo legato all'effetto della trasformazione sulle coordinate (δx) e quello ($\delta \phi$) sui campi stessi. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu a}(x) &\equiv \left[-\Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta(x) + \partial_\nu \phi^\alpha(x) \Lambda_a^\nu(x) \right] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \Lambda_{\mu a}(x) = \\ &= -\Gamma_{a\beta}^\alpha \phi^\beta(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} + T_{\mu\rho}(x) \Lambda_a^\rho(x) \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

Veniamo adesso alle conseguenze che derivano, via il Teorema di Noëther, dall'invarianza in forma della lagrangiana sotto il gruppo di Lorentz.

Ricordiamo che questo gruppo, in accordo con la (1.1), è parametrizzato come gruppo di Lie nel modo seguente

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2} \alpha_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}; \quad (M^{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha} = i(\delta^{\mu\alpha} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta^{\nu\alpha} \delta_{\beta}^{\mu}) \quad (\text{B.65})$$

con $\alpha_{\mu\nu}$ matrice reale antisimmetrica.

In questo caso, evidentemente, risulta

$$x \rightarrow x' : \quad x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2} \alpha_{\rho\tau} \left(\hat{M}^{\rho\tau} \right)_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\text{B.66})$$

$$\phi^{\alpha}(x) \rightarrow \psi^{\alpha}(x') = \phi^{\alpha}(x) + \frac{1}{2} \alpha_{\rho\tau} (\Sigma^{\rho\tau})_{\alpha\beta} \phi^{\beta} \quad (\text{B.67})$$

dove abbiamo posto

$$\hat{M}^{\rho\tau} \equiv -i M^{\rho\tau} \Rightarrow \left(\hat{M}^{\rho\tau} \right)_{\nu}^{\mu} = (\delta^{\rho\mu} \delta_{\nu}^{\tau} - \delta^{\tau\mu} \delta_{\nu}^{\rho}) \quad (\text{B.68})$$

Nelle notazioni (B.52) e (B.53) le (B.66) e (B.67) implicano, evidentemente, che

$$(\Lambda^{\rho\tau})^{\mu} = \left(\hat{M}^{\rho\tau} \right)_{\nu}^{\mu} x^{\nu}; \quad (\Gamma^{\rho\tau})_{\alpha\beta} = (\Sigma^{\rho\tau})_{\alpha\beta} \quad (\text{B.69})$$

²¹⁶cfr. J.D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, pag. 18

Si osservi come, per come è stato definito, il tensore $T_{\mu\nu}$ non è necessariamente simmetrico: quello che il teorema garantisce è che, comunque, $\partial^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$ e quindi che sono le funzioni $T_{0\nu}(x)$ le quali costituiscono le densità (covarianti) di quadrimpulso del campo.

per cui, usando la (B.64), possiamo concludere che sono conservate le seguenti sei correnti (si ricordi che $\alpha_{\rho\tau}$ e dunque $\hat{M}^{\rho\tau}$ e $\Sigma^{\rho\tau}$ sono antisimmetriche negli indici (ρ, τ) !)

$$(\Theta^{\rho\tau})_{\mu}(x) = -(\Sigma^{\rho\tau})_{\alpha\beta} \phi^{\beta}(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{\alpha})} + T_{\mu\sigma}(x) (\hat{M}^{\rho\tau})^{\sigma}_{\nu} x^{\nu} \quad (\text{B.70})$$

ovvero, cambiando di segno ed alzando l'indice μ , abbiamo infine

$$\begin{aligned} (\Theta^{\rho\tau})^{\mu}(x) &= (\Sigma^{\rho\tau})_{\alpha\beta} \phi^{\beta}(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{\alpha})} - T^{\mu}_{\sigma}(x) [\delta^{\rho\sigma} \delta^{\tau}_{\nu} - \delta^{\tau\sigma} \delta^{\rho}_{\nu}] x^{\nu} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{\alpha})} (\Sigma^{\rho\tau})_{\alpha\beta} \phi^{\beta}(x) - T^{\mu\rho}(x) x^{\tau} + T^{\mu\tau}(x) x^{\rho} \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

Il teorema di Noëther assicura che le quantità $\int d^3x (\Theta^{\rho\tau})^0(x)$ sono conservate dalla dinamica. Vediamo quale è il loro significato fisico. Per questo, cominciamo con il porre $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ e $\vec{T}(x) \equiv (T^{01}(x), T^{02}(x), T^{03}(x))$ e definiamo quindi

$$\begin{aligned} J_1(x) &\equiv (\Theta^{23})^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^{\alpha})} (\Sigma^{23})_{\alpha\beta} \phi^{\beta}(x) + T^{03}(x) y - T^{02}(x) x = \\ &= S_1 + (\vec{r} \times \vec{T}(x))_1 \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

$$\begin{aligned} J_2(x) &\equiv (\Theta^{31})^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^{\alpha})} (\Sigma^{31})_{\alpha\beta} \phi^{\beta}(x) + T^{01}(x) z - T^{03}(x) x = \\ &= S_2 + (\vec{r} \times \vec{T}(x))_2 \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

$$\begin{aligned} J_3(x) &\equiv (\Theta^{12})^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^{\alpha})} (\Sigma^{12})_{\alpha\beta} \phi^{\beta}(x) + T^{02}(x) x - T^{01}(x) y = \\ &= S_3 + (\vec{r} \times \vec{T}(x))_3 \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

i.e.

$$J_i(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^{\alpha})} (\Sigma^{jk})_{\alpha\beta} \phi^{\beta}(x) + T_k(x) r_j - T_j(x) r_k \right\} \quad (\text{B.75})$$

in cui riconosciamo la densità di momento angolare totale associato al campo, fatto sia dalla parte orbitale $(\vec{r} \times \vec{T}(x))$ che da un termine di spin \vec{S} del campo, legato alle Σ , cioè alla rappresentazione del gruppo delle rotazioni nello spazio delle componenti del campo stesso.

Le altre tre quantità conservate legate all'invarianza sotto il gruppo di Lorentz provengono dalle seguenti densità

$$K_1(x) \equiv (\Theta^{01})^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^{\alpha})} (\Sigma^{01})_{\alpha\beta} \phi^{\beta}(x) + T^{01}(x) t - T^{00}(x) x \quad (\text{B.76})$$

$$K_2(x) \equiv (\Theta^{02})^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^{\alpha})} (\Sigma^{02})_{\alpha\beta} \phi^{\beta}(x) + T^{02}(x) t - T^{00}(x) y \quad (\text{B.77})$$

$$K_3(x) \equiv (\Theta^{03})^0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^{\alpha})} (\Sigma^{03})_{\alpha\beta} \phi^{\beta}(x) + T^{03}(x) t - T^{00}(x) z \quad (\text{B.78})$$

i.e.

$$K_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\alpha)} (\Sigma^{0i})_{\alpha\beta} \phi^\beta(x) + T_i(x) t - T^{00}(x) r_i \quad (\text{B.79})$$

Mentre la costanza di \vec{J} esprime la conservazione del momento angolare totale (orbitale e spin), il fatto che il vettore \vec{K} sia anch'esso conservato, esprime semplicemente la costanza della velocità del moto del centro di massa del sistema dei campi considerato.

Per capire meglio il modo come la parte orbitale e quella legata alla trasformazione dei campi si combinano fra di loro, vediamo adesso che cosa accade nel caso del campo elettromagnetico libero.

- **Il campo elettromagnetico libero**

B.4.2 L'invarianza di gauge di prima specie

Un'invarianza che si incontra spesso in Meccanica Quantistica è l'invarianza per trasformazione di fase della funzione d'onda, i.e.

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x); \quad \psi^*(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \psi^*(x) \quad (\text{B.80})$$

Nel linguaggio lagrangiano, questo corrisponde evidentemente a dire che la densità lagrangiana \mathcal{L} da cui sono poi ricavate le equazioni del moto, è invariante in forma sotto le trasformazioni precedenti, le quali costituiscono, evidentemente, un gruppo di Lie abeliano ad una dimensione.

Consideriamo allora una trasformazione di fase infinitesima: nel linguaggio generale della (B.52), sviluppato per dimostrare il teorema di Noëther, i.e.

$$x \rightarrow x' : x'^\mu = x^\mu + \Lambda_a^\mu(x) \omega_a \equiv x^\mu + \delta x^\mu \quad (\text{B.81})$$

$$\phi^\alpha(x) \rightarrow \psi^\alpha(x') : \psi^\alpha(x') = (\delta_\beta^\alpha + \Gamma_{a\beta}^\alpha \omega_a) \phi^\beta(x) \quad (\text{B.82})$$

questo significa, evidentemente²¹⁷

$$\begin{array}{lll} x'^\mu & \rightarrow & x^\mu \\ \psi & \rightarrow & \psi + i\alpha \psi \\ \psi^* & \rightarrow & \psi^* - i\alpha \psi^* \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \Lambda^\mu(x) = 0 & ; \\ \Gamma_1^1 = i & ; \quad \Gamma_2^1 = 0 & ; \\ \Gamma_1^2 = 0 & ; \quad \Gamma_2^2 = -i & ; \end{array} \quad (\text{B.83})$$

per cui, sostituendo nella espressione generale della corrente conservata di cui alla (B.58), riscritta nel caso particolare in cui il gruppo di simmetria sia ad un solo parametro,

$$\Theta_a^\mu \rightarrow J^\mu \equiv \left[-\Gamma_\beta^\alpha \phi^\beta(x) + \partial_\mu \phi^\alpha(x) \Lambda^\mu(x) \right] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L} \Lambda^\mu(x) \quad (\text{B.84})$$

otteniamo infine

$$J^\mu = i \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi + \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right] \quad (\text{B.85})$$

che, per quanto precede, è quindi una quadricorrente²¹⁸ conservata dalla dinamica.

Ma evidentemente, il fatto che la corrente (B.85) sia conservata, implica che

$$\partial_0 \int d^3x J^0(x^\mu) + \partial_i \int d^3x J^i(x^\mu) = 0 \quad (\text{B.86})$$

²¹⁷Per semplicità ed uniformità di notazioni assumiamo qui che l'indice con cui sono labelati i campi assuma i valori 1 e 2, e risulti $\phi^1 \equiv \phi$; $\phi^2 \equiv \phi^*$. Inoltre, essendo il gruppo di trasformazioni ad un solo parametro, omettiamo l'indice a .

²¹⁸Si noti che, così come la densità lagrangiana è determinata a meno di una costante moltiplicativa, anche la quadricorrente, omogenea nella lagrangiana, è anch'essa determinata a meno di un fattore di scala arbitrario.

per cui, se possiamo assumere che J^i si annulli all'infinito spaziale più velocemente di R^{-2} , allora, trasformando il secondo membro in un integrale di superficie attraverso il teorema della divergenza di Gauss, esso è nullo, ovvero risulta

$$\partial_0 \int d^3x J^0(\vec{x}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int d^3x J^0(\vec{x}, t) = \text{cost} \quad (\text{B.87})$$

La quantità $\int d^3x J^0(\vec{x}, t)$ è, in generale, proporzionale, come vedremo, al numero di particelle descritte dal campo, che, nello schema di prima quantizzazione della MQ , sostanzialmente coincide con la norma stessa della funzione d'onda.

• Equazione di Schrödinger

Abbiamo visto come la densità lagrangiana da cui si deriva l'equazione di Schrödinger, sia

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_i \psi^*)(\partial^i \psi) - \psi^* V \psi \quad (\text{B.88})$$

Palesemente essa è invariante sotto la trasformazione di fase (B.83): la corrente conservata che ne discende secondo la (B.85) risulta allora data da

$$J^\mu = i \left[-\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} + \phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \right] \quad (\text{B.89})$$

da cui segue che

$$J^0 = i \left[-\phi \left(\frac{i\hbar}{2} \phi^* \right) + \phi^* \left(-\frac{i\hbar}{2} \phi \right) \right] = \hbar \phi \phi^* \quad (\text{B.90})$$

$$\begin{aligned} J^i &= i \left[-\phi \left(\frac{\hbar^2}{2m} \partial^i \phi^* \right) + \phi^* \left(\frac{\hbar^2}{2m} \partial^i \phi \right) \right] \\ &= -i \frac{\hbar^2}{2m} [\phi(\partial^i \phi^*) - \phi^*(\partial^i \phi)] = \hbar \left[\frac{i\hbar}{2m} (\phi \vec{\nabla} \phi^* - \phi^* \vec{\nabla} \phi) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.91})$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\vec{\nabla}_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i \equiv -\partial^i$$

Dunque, la quadricorrente conservata²¹⁹ è

$$J^\mu \equiv (J^0, J^i) \equiv \hbar \left(|\phi|^2, \frac{i\hbar}{2m} \phi \vec{\nabla} \phi^* \right) \quad (\text{B.93})$$

²¹⁹Per motivi di maggior concisione, introduciamo qui il simbolo

$$\vec{\nabla} : f \vec{\nabla} g \equiv f(\vec{\nabla} g) - (\vec{\nabla} f)g \quad (\text{B.92})$$

A parte il fattore globale \hbar , dunque, ne risulta che la parte temporale della quadricorrente J^0 altri non è che la densità di probabilità $|\phi|^2$, per cui la parte spaziale $J^i = \frac{i\hbar}{2m}\phi\bar{\nabla}\phi^*$ necessariamente individua la densità di corrente di probabilità.

Ricordiamo infine, prima di concludere l'argomento, che in prima quantizzazione, la conservazione della probabilità significa semplicemente la conservazione dell'esistenza della particella descritta dalla funzione d'onda ϕ , non essendo permesso alcun meccanismo di creazione e distruzione della stessa.

- **Campo scalare carico**

Nel caso del campo scalare carico, abbiamo visto che la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2\phi\phi^* \quad (\text{B.94})$$

Chiaramente anche questa lagrangiana è invariante per trasformazioni di fase (B.83) ed è immediato dimostrare che la corrente conservata (B.85) che ne risulta è

$$J^\mu = i [-(\partial^\mu\phi^*)\phi + \phi^*(\partial^\mu\phi)] \equiv i\phi^*\bar{\partial}^\mu\phi \quad (\text{B.95})$$

per cui risulta

$$J^0 = i \left(\phi^* \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi^*}{\partial t} \phi \right) \quad (\text{B.96})$$

la quale è definita positiva soltanto se nello sviluppo di Fourier della funzione ϕ compaiono solo frequenze positive, i.e. andamenti temporali del tipo e^{-iEt} con $E > 0$.

- **Campo di Dirac**

Nel caso del campo di Dirac, abbiamo visto che la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi] - m\bar{\psi}\psi \quad (\text{B.97})$$

Di nuovo, essendo $\bar{\psi} \equiv (\psi^*)^t \gamma^0$ e γ^0 reale, essa è evidentemente invariante per la trasformazione di fase (B.83). La corrente conservata che ne consegue in base alla (B.85) è

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{i}{2} \left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi + \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right] \\ &= \frac{i}{2} [-i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

Quanto poi alla componente temporale della quadricorrente, essa risulta evidentemente pari a

$$J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \quad (\text{B.99})$$

C Appendix: Le simmetrie C, P e T in Teoria Quantistica dei Campi

C.1 Generalità

Anche per introdurre la nozione di simmetria in teoria quantistica dei campi (*QFT*), assumeremo in generale che, in stretta analogia con quanto fatto nello schema di prima quantizzazione, esistano operatori \mathcal{O} capaci di trasformare gli stati in modo da lasciare invariata la struttura probabilistica dello spazio da essi costituito. Visto come isomorfismo dell'algebra degli operatori in sé, quello indotto dall'operatore \mathcal{O} dovrà necessariamente essere compatibile con le condizioni di quantizzazione, cioè dovrà rispettare l'algebra dei campi. Al solito, questa condizione sarà automaticamente soddisfatta se definiremo l'operatore su una base dello spazio di Hilbert, mentre dovrà essere imposta se l'isomorfismo dell'algebra in sé verrà costruito in base a qualche ragione *a priori*.

Un operatore che soddisfi le condizioni precedenti è detto essere una *simmetria*. Se poi accade anche che

- lo stato di minima energia (vuoto) è non degenere e \mathcal{O} -invariante;
- la lagrangiana $\mathcal{L}(\vec{x}, t)$ è invariante in forma sotto l'operatore \mathcal{O} ,

allora essa è detta *conservata* o *esatta* o anche *invarianza*.

Si osservi che il rispetto della seconda condizione di cui sopra implica che la trasformazione \mathcal{O} rispetti la dinamica, ovvero che le equazioni di moto siano \mathcal{O} -invarianti, i.e. che, al solito

$$[\mathcal{O}, H] = 0 \quad (\text{C.1})$$

La simmetria è *rotta* se la lagrangiana \mathcal{L} non è \mathcal{O} -invariante, mentre viene detta *rotta spontaneamente* se, pur essendo la lagrangiana \mathcal{O} -invariante, è lo stato di minima energia ad essere degenere e non \mathcal{O} -invariante.

Detto questo in generale, passeremo adesso a definire le trasformazioni di coniugazione di carica C , di parità P e di inversione temporale T mostrando come, in base a quanto visto precedentemente nello schema di prima quantizzazione ed al concetto classico che abbiamo di loro, queste trasformazioni agiscono nello spazio²²⁰ di Fock di particella libera, ovvero sugli operatori di creazione e distruzione.

²²⁰Ricordiamo a questo proposito che lo spazio di Fock è lo spazio di Hilbert che ha per base lo stato di vuoto $|\Omega\rangle$ che, per ipotesi, è unico, e gli stati di multiparticella/antiparticella in autostati dell'impulso, i.e.

$$|\Omega\rangle \\ a^\dagger(\vec{p}_1) \dots a^\dagger(\vec{p}_n) b^\dagger(\vec{q}_1) b^\dagger(\vec{q}_m) |\Omega\rangle; \quad n, m \geq 1$$

Per quanto detto, volendo che C , P , T siano simmetrie, richiederemo altresì che il vuoto sia non degenere e C , P , T invariante²²¹, i.e.

$$C|\Omega\rangle = P|\Omega\rangle = T|\Omega\rangle = |\Omega\rangle \quad (\text{C.3})$$

C.2 La Coniugazione di Carica

Classicamente, la simmetria di coniugazione di carica C comporta il cambiamento di segno della carica elettrica e dei campi elettrici \vec{E} e magnetici \vec{B} . In questo modo, la lagrangiana²²² del campo elettromagnetico in interazione con una quadricorrente J^μ

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - J^\mu(x)A_\mu(x) \quad (\text{C.4})$$

risulta evidentemente invariante, in quanto, sotto l'azione di C , si ha

$$\begin{aligned} A^\mu &\rightarrow -A^\mu & \Rightarrow & F^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu} \\ J^\mu &\rightarrow -J^\mu \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Quindi, in elettrodinamica classica, C è una simmetria conservata.

In QFT , manterremo ancora, senz'altro, la richiesta caratterizzante di questa simmetria, ovvero che sia

$$C A^\mu C^{-1} = -A^\mu \quad (\text{C.6})$$

e quindi, affinché C possa essere una simmetria conservata non solo per il campo libero, ma anche nel caso di interazione elettromagnetica, sarà necessario, quanto alla densità di corrente elettrica, che risulti

$$C J_\mu C^{-1} = -J_\mu \quad (\text{C.7})$$

²²¹A priori basterebbe imporre l'invarianza dello stato di vuoto e non necessariamente del vettore che lo rappresenta. Questo significa che, se indichiamo con Θ una qualsiasi delle simmetrie C , P , T , l'invarianza del vuoto impone solo che

$$\Theta|\Omega\rangle = e^{i\theta}|\Omega\rangle \quad (\text{C.2})$$

L'ipotesi che facciamo è quella di riassorbire comunque questa fase nella definizione stessa della simmetria, in modo che valga comunque la (C.3).

²²²Cfr. J.D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, 1965, pag. 70 e pag. 86

Ma naturalmente la densità di quadricorrente elettrica è costruita a partire dai campi che descrivono le particelle, quindi, se vogliamo che C sia una simmetria conservata anche in QFT , occorrerà definirla sui campi stessi in modo che

- garantisca la validità della (C.7);
- garantisca che anche la lagrangiana libera del campo sia C -invariante;
- garantisca il rispetto della struttura algebrica costruita con i campi, ovvero il rispetto delle regole di commutazione/anticommutazione che li riguardano.

Richiederemo inoltre, così come abbiamo visto accadere in prima quantizzazione, che questa simmetria sia unitaria.

Inizieremo trattando il caso del campo scalare carico ϕ .

Come ben sappiamo, la sua lagrangiana libera²²³ è

$$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) + m^2 \phi \phi^\dagger \quad (\text{C.9})$$

da cui seguono le equazioni per i campi liberi

$$(\square + m^2)\phi = 0 = (\square + m^2)\phi^\dagger \quad (\text{C.10})$$

i quali sono dati, in termini degli operatori di creazione e distruzione di particella/antiparticella, dagli sviluppi seguenti²²⁴

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \left\{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad (\text{C.11})$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \left\{ b(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad (\text{C.12})$$

con le regole di commutazione (le sole non nulle ...)

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{q})] = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (\text{C.13})$$

equivalenti, come abbiamo visto, alle regole di commutazione canoniche (2.271) e (2.283), i.e.

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 = [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)] \quad (\text{C.14})$$

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = i \Delta(x - y, m) \quad (\text{C.15})$$

²²³Più propriamente dovremmo usare la sua forma simmetrizzata nei due campi ϕ e ϕ^\dagger , i.e.

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \{ \partial_\mu \phi, \partial^\mu \phi^\dagger \} + \frac{1}{2} m^2 \{ \phi, \phi^\dagger \} \quad (\text{C.8})$$

²²⁴Come al solito, con px intendiamo il prodotto scalare di Lorentz $p^\mu x_\mu$, mentre $E_p \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$.

dove, per definizione, risulta

$$\Delta(x-y, m) \equiv -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{-iq(x-y)} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] \quad (C.16)$$

Definiremo allora la simmetria di coniugazione di carica C in modo che essa *scambi* lo stato di particella con quello di antiparticella e viceversa, rispettando il loro stato di impulso ed eventuali gradi di libertà interni, i.e., nel caso considerato del campo scalare, porremo

$$C |a(\vec{p})\rangle \equiv |b(\vec{p})\rangle; \quad C |b(\vec{p})\rangle \equiv |a(\vec{p})\rangle \quad (C.17)$$

da cui risulta chiaramente, in particolare, che $C^2 = I$.

Un altro modo equivalente di definire la simmetria è quello di vederne l'effetto direttamente sugli operatori di creazione e distruzione: essendo

$$|a(\vec{p})\rangle \equiv a^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle; \quad |b(\vec{p})\rangle \equiv b^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle \quad (C.18)$$

ed essendo, per ipotesi, il vuoto C -invariante, la relazione (C.17) può essere tradotta nelle condizioni

$$C a^\dagger(\vec{p}) C^{-1} \equiv b^\dagger(\vec{p}); \quad C b^\dagger(\vec{p}) C^{-1} \equiv a^\dagger(\vec{p}) \quad (C.19)$$

da cui, siccome si è assunto che C sia unitaria, prendendo l'aggiunto di entrambi i membri, si ottiene altresì che, per gli operatori di annichilazione, deve essere

$$C a(\vec{p}) C^{-1} = b(\vec{p}); \quad C b(\vec{p}) C^{-1} = a(\vec{p}) \quad (C.20)$$

Prima di continuare, vogliamo osservare che la richiesta che la simmetria di coniugazione di carica C mandi uno stato di particella in uno di antiparticella e viceversa, *non* la fissa univocamente. Infatti questa richiesta è rispettata anche se definiamo

$$C |a(\vec{p})\rangle = e^{i\eta_c} |b(\vec{p})\rangle; \quad C |b(\vec{p})\rangle = e^{-i\eta_c} |a(\vec{p})\rangle \quad (C.21)$$

In questo caso, si ha ancora che $C^2 = I$ e ne consegue che

$$C a^\dagger(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} b^\dagger(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad C a(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} b(\vec{p}) \quad (C.22)$$

$$C b^\dagger(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} a^\dagger(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad C b(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} a(\vec{p}) \quad (C.23)$$

L'unica richiesta che dobbiamo ragionevolmente mantenere è che il fattore di fase $e^{i\eta}$ sia indipendente dall'impulso \vec{p} . Questo per non violare l'ulteriore richiesta che facciamo a C , cioè quella per cui vogliamo che lo stato coniugato di carica, per esempio, dello stato rappresentato dal vettore

$$\alpha |a(\vec{p})\rangle + \beta |a(\vec{q})\rangle \quad (C.24)$$

sia comunque rappresentato dal vettore²²⁵

$$\alpha |b(\vec{p})\rangle + \beta |b(\vec{q})\rangle \quad (\text{C.26})$$

a meno di un eventuale fattore di fase globale, inessenziale.

Ritorniamo ora al punto principale, che è quello di giungere infine alla definizione di una simmetria la quale descriva lo scambio particella-antiparticella e che sia conservata, ovvero

- sia esatta anche per il campo libero;
- sia tale per cui la densità di corrente elettromagnetica soddisfa la condizione (C.7).

Partiamo dunque dalla definizione (C.21) che, evidentemente, contiene la (C.17) come caso particolare in cui $\eta_c = 0$, e vediamo se questa trasformazione gode delle proprietà suddette.

Per prima cosa, determiniamo quale è l'azione di C sui campi ϕ e ϕ^\dagger .

Ricordiamo che, per ipotesi, C è stata supposta essere lineare (e non antilineare), per cui, usando la (C.22) e la (C.23), otteniamo

$$\begin{aligned} C \phi(x) C^{-1} &= C \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{a(\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}\} C^{-1} = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{e^{-i\eta_c} b(\vec{p}) e^{-ipx} + e^{-i\eta_c} a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}\} = \\ &= e^{-i\eta_c} \phi^\dagger(x) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

mentre risulta ovviamente che

$$\begin{aligned} C \phi^\dagger(x) C^{-1} &= C \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{b(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}\} C^{-1} = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{e^{i\eta_c} a(\vec{p}) e^{-ipx} + e^{i\eta_c} b^\dagger(\vec{p}) e^{ipx}\} = \\ &= e^{i\eta_c} \phi(x) \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

²²⁵Si osservi a questo proposito che, usando la definizione (C.21), per una combinazione lineare di stati di particella e antiparticella, la presenza del fattore di fase $e^{i\eta_c}$ nella definizione di C fa, in effetti differenza, infatti risulta

$$C (\alpha |a(\vec{p})\rangle + \beta |b(\vec{q})\rangle) = \alpha e^{i\eta_c} |b(\vec{p})\rangle + \beta e^{-i\eta_c} |a(\vec{q})\rangle \quad (\text{C.25})$$

e questo vettore certamente *non* rappresenta, in generale, lo stesso stato del vettore $\alpha |b(\vec{p})\rangle + \beta |a(\vec{q})\rangle \dots$

Lo stesso accade se consideriamo una sovrapposizione lineare di un vettore che rappresenta una particella/antiparticella ed il vuoto, oppure uno stato di n particelle con quello di m antiparticelle, in cui $n \neq m$.

E' un fatto questo che avremo modo di riprendere.

Passiamo adesso a verificare che la dinamica del campo libero è rispettata dalla simmetria C . Come abbiamo avuto modo di dire precedentemente, questo significa che dobbiamo verificare l'invarianza delle equazioni del moto sotto C . Se vogliamo partire dalla densità lagrangiana, questo significa verificare che essa è invariante in forma sotto C . D'altronde, nel nostro caso, date la (C.27) e la (C.28), abbiamo

$$C : \quad x \rightarrow x \quad (C.29)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi_C(x) = e^{-i\eta_C} \phi^\dagger(x) \Leftrightarrow \phi^\dagger(x) = e^{i\eta_C} \phi_C(x) \quad (C.30)$$

$$\phi^\dagger(x) \rightarrow \phi_C^\dagger(x) = e^{i\eta_C} \phi(x) \Leftrightarrow \phi(x) = e^{-i\eta_C} \phi_C^\dagger(x) \quad (C.31)$$

L'invarianza in valore della lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) - m^2 \phi \phi^\dagger \quad (C.32)$$

garantisce che i campi ϕ_C e ϕ_C^\dagger soddisfano le equazioni del moto dedotte dalla densità lagrangiana seguente (ottenuta dalla precedente per sostituzione ...)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C(x) &= (\partial_\mu e^{-i\eta_C} \phi_C^\dagger(x)) (\partial^\mu e^{i\eta_C} \phi_C(x)) - m^2 e^{-i\eta_C} \phi_C^\dagger(x) e^{i\eta_C} \phi_C(x) = \\ &= (\partial_\mu \phi_C^\dagger)(\partial^\mu \phi_C) - m^2 \phi_C^\dagger \phi_C \end{aligned} \quad (C.33)$$

che, apparentemente, siccome ϕ_C e ϕ_C^\dagger non commutano, non coincide in forma con $\mathcal{L}(x)$...! A parte che si potrebbe facilmente vedere che, comunque, la lagrangiana \mathcal{L}_C dà luogo alle stesse equazioni del moto che la lagrangiana \mathcal{L} , in realtà il punto sta nel fatto che, proprio allo scopo di trattare allo stesso modo i campi ϕ e ϕ^\dagger , avremmo dovuto piuttosto partire dalla lagrangiana (C.8)

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \{ \partial_\mu \phi, \partial^\mu \phi^\dagger \} + \frac{1}{2} m^2 \{ \phi, \phi^\dagger \} \quad (C.34)$$

la quale, invece, è ovviamente C -invariante dato che è simmetrica nello scambio $\phi \leftrightarrow \phi^\dagger$.

Un altro modo per verificare che la dinamica del campo libero è rispettata dalla simmetria è quello di verificare che C , qualunque sia η_C , commuta con l'hamiltoniana libera H_0 . Ricordiamo per questo che, in termini degli operatori di creazione e distruzione, risulta²²⁶

$$H_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} [E_p a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + E_p b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})] \quad (C.37)$$

²²⁶Abbiamo, infatti, per esempio, che

$$H_0 |a(\vec{q})\rangle \equiv H_0 a^\dagger(\vec{q}) |\Omega\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} [E_p a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + E_p b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})] a^\dagger(\vec{q}) |\Omega\rangle \quad (C.35)$$

e poiché $[b, a^\dagger] = 0$ e $b|\Omega\rangle = 0$, il secondo termine nell'espressione precedente non contribuisce. Quanto al primo, usando il fatto che

$$a a^\dagger = [a, a^\dagger] + a^\dagger a$$

D'altronde, evidentemente, risulta

$$C a^\dagger a C^{-1} = C a^\dagger C^{-1} C a C^{-1} = e^{i\eta_c} b^\dagger e^{-i\eta_c} b = b^\dagger b \quad (\text{C.38})$$

ed analogamente si ha

$$C b^\dagger b C^{-1} = C b^\dagger C^{-1} C b C^{-1} = e^{-i\eta_c} a^\dagger e^{i\eta_c} a = a^\dagger a \quad (\text{C.39})$$

per cui è banale che risulti

$$C H_0 C^{-1} = H_0 \quad \Leftrightarrow \quad [C, H_0] = 0 \quad (\text{C.40})$$

Appurato che C rispetta la dinamica del campo scalare libero, verifichiamo per completezza che essa rispetta anche le regole di commutazione.

Risulta che sotto C si ha

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] \longleftrightarrow [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{q})] = (2\pi)^3 2E_p \delta(\vec{p} - \vec{q}) \quad (\text{C.41})$$

$$[a(\vec{p}), a(\vec{q})] \longleftrightarrow [b(\vec{p}), b(\vec{q})] e^{-2i\eta_c} = 0 \quad (\text{C.42})$$

$$[a(\vec{p}), b(\vec{q})] \longleftrightarrow [b(\vec{p}), a(\vec{q})] = 0 \quad (\text{C.43})$$

$$[a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] \longleftrightarrow [b^\dagger(\vec{p}), b^\dagger(\vec{q})] e^{2i\eta_c} = 0 \quad (\text{C.44})$$

ovvero abbiamo (gli altri commutatori restano identicamente nulli ...)

$$C [\phi(x), \phi^\dagger(y)] C^{-1} = [\phi^\dagger(x), \phi(y)] = -[\phi(y), \phi^\dagger(x)] = [\phi(x), \phi^\dagger(y)] \quad (\text{C.45})$$

dove la seconda uguaglianza discende dal carattere antisimmetrico del commutatore, mentre la terza uguaglianza discende dal carattere dispari della funzione $\Delta(x)$ di cui alla sua definizione (C.16).

Resta così provato²²⁷ che C è effettivamente una *simmetria conservata* per il campo scalare libero che è conservata indipendentemente dal valore della fase η_c .

e che, di nuovo, $a|\Omega\rangle = 0$, esso diventa

$$\begin{aligned} H_0 |a(\vec{q})\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} E_p a^\dagger(\vec{p}) [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] |\Omega\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} E_p a^\dagger(\vec{p}) (2\pi)^3 2E_p \delta(\vec{p} - \vec{q}) |\Omega\rangle \\ &= E_q a^\dagger(\vec{q}) |\Omega\rangle \equiv E_q |a(\vec{q})\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

Questo prova che, sulla base degli autostati di singola particella, l'operatore H_0 definito dalla (C.37) è diagonale ed ha come autovalore l'energia complessiva dello stato. Questo stesso risultato può essere facilmente dimostrato anche per gli stati di antiparticella e di multiparticella/antiparticella, per cui ne segue che l'operatore H_0 dato dalla (C.37) coincide effettivamente con l'hamiltoniana libera. Evidentemente, infatti, l'operatore $a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p})$ fornisce il numero di particelle con impulso \vec{p} presenti nello stato considerato, mentre $b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})$ fornisce quello di antiparticelle !

²²⁷Osserviamo che, per quanto riguarda la compatibilità con le regole di commutazione, non poteva essere altrimenti visto che, attraverso la (C.21), abbiamo definito C su una base dello spazio di Hilbert ...

Quanto poi all'osservazione che abbiamo anticipato, per cui, se la fase η_c non è nulla, allora, in generale, per esempio

$$\begin{aligned} \alpha | a(\vec{p}) > + \beta | b(\vec{q}) > \rightarrow e^{i\eta_c} \alpha | b(\vec{p}) > + e^{-i\eta_c} \beta | a(\vec{q}) > \neq \\ \neq (\alpha | b(\vec{p}) > + \beta | a(\vec{q}) >) \times \text{fase opportuna} \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

al momento limitiamoci ad osservare solo che, almeno se particella e antiparticella differiscono²²⁸ nella carica elettrica, allora, per la regola di superselezione sulla carica che impedisce la possibilità di realizzare stati fisici che siano sovrapposizione di stati con carica diversa, il problema non si pone.

Riprenderemo comunque l'argomento quando si tratterà di considerare il sistema dei mesoni K , dove $K^0 \neq \bar{K}^0$, ma entrambi sono elettricamente scarichi ...

Passiamo adesso a studiare l'azione di C sulla quadricorrente.

Come abbiamo già detto, per mantenere a C il carattere di simmetria conservata anche in presenza di interazione elettromagnetica, richiediamo che la densità di corrente elettrica soddisfi la (C.7), cioè che, sotto C , risulti $J^\mu(x) \rightarrow -J^\mu(x)$.

D'altronde, la densità di quadricorrente elettromagnetica associata ad un campo scalare carico è pari alla densità di quadricorrente di probabilità, moltiplicata per la carica elettrica assoluta e della particella (quindi e ha un segno univocamente definito una volta stabilito chi è la particella e chi è l'antiparticella). Come sappiamo, questa corrente di probabilità è quella che si ottiene dal teorema di Noëther, applicato all'invarianza in forma della densità lagrangiana per trasformazioni di gauge di prima specie dei campi. Abbiamo²²⁹

$$J^\mu(x) = i e [\phi^\dagger(x)(\partial^\mu \phi)(x) - (\partial^\mu \phi^\dagger)(x) \phi(x)] = (J^\dagger)^\mu(x) \quad (\text{C.48})$$

e visto che

$$C : \quad \phi \rightarrow e^{-i\eta_c} \phi^\dagger; \quad \phi^\dagger \rightarrow e^{i\eta_c} \phi \quad (\text{C.49})$$

è evidente allora che, indipendentemente dalla fase η_c , risulta²³⁰

$$C : \quad J^\mu(x) \rightarrow -J^\mu(x) \quad (\text{C.53})$$

²²⁸Non è sempre questo il caso ...

²²⁹Più propriamente occorre qui prendere il prodotto *normal - ordinato* dei campi, in cui, per definizione, gli operatori di annichilazione sono a destra di quelli di creazione, per cui, nel caso considerato, per esempio risulta

$$< \Omega | J^\mu | \Omega > = 0 \quad (\text{C.47})$$

²³⁰Sempre basandoci sul fatto che l'operatore $a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p})$ fornisce il numero di particelle con impulso \vec{p} presenti nello stato considerato, mentre $b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})$ fornisce quello di antiparticelle, risulta evidentemente che l'operatore di Carica è dato da

$$Q = e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) - b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})] \quad (\text{C.50})$$

la quale dimostra quindi che l'operatore di coniugazione di carica C è una *simmetria conservata* non solo per il campo scalare libero, ma anche quando si consideri la sua interazione con il campo elettromagnetico.

Come abbiamo evidenziato esplicitamente nella (C.48), la densità di corrente elettromagnetica deve essere un operatore hermitiano. Questo deve accadere in quanto

$$-J^\mu(x) A_\mu(x) \quad (C.54)$$

è la lagrangiana di interazione con il campo elettromagnetico ed il campo A_μ è autoaggiunto, risultando

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \sum_{s=\pm} \left\{ a(\vec{p}, s) \epsilon_s^\mu(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}, s) \epsilon_s^{*\mu}(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad (C.55)$$

dove, essendo la massa del fotone nulla, $E_p \equiv |\vec{p}|$ e l'unico commutatore non nullo è il seguente

$$\left[a(\vec{p}, s), a^\dagger(\vec{q}, r) \right] = 2E_p (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{sr} \quad (C.56)$$

mentre $\epsilon_s^\mu(\vec{p})$ è il vettore di polarizzazione associato ad un fotone di impulso \vec{p} ed elicità s , i.e., per esempio nel caso di un fotone avente quadrimpulso $(p, 0, 0, p)$, è

$$\epsilon_\pm^\mu = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0) \quad (C.57)$$

Sotto coniugazione di carica, il campo A_μ *non* è invariante, come potrebbe a prima vista sembrare naturale, visto che il fotone è elettricamente scarico, bensì esso deve cambiare di segno, se vogliamo mantenere l'analogia classica, i.e.

$$C : A_\mu(x) \rightarrow -A_\mu(x) \quad (C.58)$$

dove e è la carica elettrica della particella. Da quanto si è detto, è evidente allora che risulta

$$C Q C^{-1} = -Q \quad (C.51)$$

visto che

$$C : a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) \leftrightarrow b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p}) \quad (C.52)$$

Questo si realizza²³¹ richiedendo che

$$C a(\vec{p}, s) C^{-1} = -a(\vec{p}, s); \quad C a^\dagger(\vec{p}, s) C^{-1} = -a^\dagger(\vec{p}, s) \quad (C.60)$$

in analogia (a parte il segno *meno* ...) con la definizione precedentemente data nel caso del campo scalare, se ricordiamo che, essendo A_μ autoaggiunto, fotone e antifotone sono la stessa particella. Come si vede, però, il fatto che particella e antiparticella in questo caso coincidano, non implica che C non abbia alcun effetto sullo stato di fotone, infatti dalla (C.60) segue immediatamente che

$$C |a(\vec{k}, s) \rangle = - |a(\vec{k}, s) \rangle \quad (C.61)$$

ovvero che su uno stato di n fotoni, risulta

$$C |n \text{ fotoni} \rangle = (-1)^n |n \text{ fotoni} \rangle \quad (C.62)$$

e poiché l'elettrodinamica (QED) è invariante sotto C , da questo segue in particolare che non possono esistere elementi di matrice, dovuti all'interazione elettromagnetica, fra stati con un numero di fotoni pari e stati con un numero di fotoni dispari: è il teorema di Furry.

Parlando di QED e di interazione elettromagnetica, non possiamo non discutere, a questo punto, l'effetto della coniugazione di carica C sul campo spinoriale (ovvero sul campo di Dirac), che ben descrive particelle cariche come, per esempio, l'elettrone ... In questo caso, come già sappiamo, è

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{2E_p (2\pi)^3} \{ a^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (C.63)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{2E_p (2\pi)^3} \{ b^{(r)}(\vec{p}) \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (C.64)$$

e valgono le regole di anticommutazione (tutte le altre sono nulle ...)

$$\{ a^{(r)}(\vec{p}), a^{\dagger(s)}(\vec{p}') \} = \{ b^{(r)}(\vec{p}), b^{\dagger(s)}(\vec{p}') \} = 2 E_p (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (C.65)$$

mentre gli spinori u e v sono normalizzati nel modo seguente

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E}} u_0^{(r)} \quad ; \quad \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{u}_0^{(r)} \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E}} \quad (C.66)$$

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E}} v_0^{(r)} \quad ; \quad \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{v}_0^{(r)} \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E}} \quad (C.67)$$

²³¹Si noti che la (C.60) definisce una simmetria conservata per il campo libero, in quanto la densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (C.59)$$

è ovviamente invariante sotto C , ovvero sotto un cambiamento di segno di A_μ , e così pure le regole di commutazione, coinvolgendo esse sempre il prodotto di due operatori di creazione/distruzione. Inoltre risulta evidentemente ancora che $C^2 = I$.

essendo

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad v_0^{(2)} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.68})$$

per cui, definendo per comodità

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.69})$$

$$\tilde{w}^{(1)} = w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \tilde{w}^{(2)} = -w^{(1)} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.70})$$

si ha che, posto $\vec{n} \equiv \vec{p}/p$, risulta

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} \begin{pmatrix} (m + E_p) w^{(r)} \\ (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) w^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m} w^{(r)} \\ \sqrt{E_p - m} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w^{(r)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.71})$$

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} \begin{pmatrix} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \tilde{w}^{(r)} \\ (m + E_p) \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p - m} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \tilde{w}^{(r)} \\ \sqrt{E_p + m} \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.72})$$

Come sappiamo, l'evoluzione del campo libero di Dirac è retta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi \quad (\text{C.73})$$

la quale gode anch'essa, evidentemente, dell'invarianza di gauge di prima specie, che stabilisce, appunto, la conservazione della densità di corrente²³² elettromagnetica

$$J^\mu(x) \equiv e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (\text{C.78})$$

²³²Osserviamo di nuovo che, almeno se ψ e $\bar{\psi}$ si riferiscono alla stessa particella, risulta

$$(J^\dagger)^\mu = J^\mu \quad (\text{C.74})$$

Infatti

$$(J^\dagger)^\mu = e \psi^\dagger (\gamma^\mu)^+ (\bar{\psi})^\dagger \quad (\text{C.75})$$

ma

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \Rightarrow (J^\dagger)^\mu = e \psi^\dagger (\gamma^\mu)^+ (\gamma^0)^\dagger \psi \quad (\text{C.76})$$

e siccome $\gamma^0 = (\gamma^0)^+$, $(\gamma^0)^2 = I$ e $(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$, risulta

$$(J^\dagger)^\mu = e \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (\gamma^0)^2 \psi \equiv J^\mu \quad (\text{C.77})$$

Veniamo adesso all'azione sul campo spinoriale della simmetria di coniugazione di carica C .

Proviamo a definirla²³³, in completa analogia con quanto fatto nel caso del campo scalare carico, ponendo di nuovo, semplicemente

$$C a^{\dagger(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} b^{\dagger(r)}(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad C a^{(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} b^{(r)}(\vec{p}) \quad (\text{C.80})$$

$$C b^{\dagger(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_c} a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad C b^{(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_c} a^{(r)}(\vec{p}) \quad (\text{C.81})$$

Vogliamo capire come si trasformeranno i campi ψ e $\bar{\psi}$ sotto questa trasformazione, ovvero se, come nel caso scalare, vanno uno nell'altro ... ed in particolare che succede poi alla corrente $J^\mu(x)$.

Consideriamo quindi, per esempio, l'integrando dello sviluppo in operatori di creazione e distruzione del campo ψ , i.e. il termine

$$a^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx} \quad (\text{C.82})$$

Sotto la simmetria di coniugazione di carica definita dalle (C.80) e (C.81), esso diviene evidentemente

$$e^{-i\eta_c} \{b^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx}\} \quad (\text{C.83})$$

il quale rassomiglia effettivamente all'integrando dello sviluppo della $\bar{\psi}$, con la differenza, però che, a parte il fattore di fase, in quest'ultimo laddove compare lo spinore u vi compare \bar{v} e laddove compare lo spinore v c'è \bar{u} . Inoltre ψ (come del resto gli spinori u e v) è una matrice colonna, mentre $\bar{\psi}$ (come pure \bar{u} e \bar{v}) è una matrice riga ... quindi, se mai, la simmetria C potrà legare ψ con $\bar{\psi}^t$ e, analogamente, $\bar{\psi}$ con ψ^t ... ma non potrà accadere, come nel caso del campo scalare, che mandi direttamente ψ in $\bar{\psi}$ e viceversa !

Ricordiamoci comunque che, dopo tutto, il nostro scopo è quello di giungere ad una definizione di C sul campo spinoriale tale per cui, per la corrente (C.78), risulti

$$C : \quad J^\mu(x) \rightarrow -J^\mu(x) \quad (\text{C.84})$$

Partiamo dunque, piuttosto, da questo punto fermo per cercare di capire la forma che dovrà assumere C sui campi ψ e $\bar{\psi}$. Riprendiamo dunque l'espressione della corrente

$$J^\mu(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (\text{C.85})$$

²³³Osserviamo che, con questa definizione, C^2 commuta con gli operatori di creazione e distruzione e dunque con ψ e $\bar{\psi}$, ovvero con qualunque operatore dell'algebra dei campi. Questo significa che possiamo, senza perdita di generalità alcuna, assumere che

$$C^2 = I \quad (\text{C.79})$$

Questa espressione ha, però, un problema: il suo valore di aspettazione sul vuoto non è nullo, a causa del modo asimmetrico con cui vi compaiono i campi ψ e $\bar{\psi}$. In realtà, la forma corretta della densità di corrente è piuttosto il prodotto *normal-ordinato*²³⁴ dell'espressione precedente, i.e.

$$J^\mu = e : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : \quad (\text{C.91})$$

ovvero²³⁵

$$J^\mu = \frac{e}{2} [\bar{\psi}, \gamma^\mu \psi] \quad (\text{C.92})$$

dove questa espressione va intesa esplicitamente nel modo seguente

$$J^\mu = \frac{e}{2} [\bar{\psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta - (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta \bar{\psi}_\alpha] \quad (\text{C.93})$$

per cui, ricordando che ψ è una matrice colonna mentre $\bar{\psi}$ è una matrice riga, in linguaggio matriciale si ha

$$J^\mu = \frac{e}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi - (\gamma^\mu \psi)^t \bar{\psi}^t] = \frac{e}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \psi^t (\gamma^\mu)^t \bar{\psi}^t] \quad (\text{C.94})$$

²³⁴Tralasciando, per comodità di notazione, di trascrivere sia gli spinori che gli esponenziali che compaiono nello sviluppo dei campi, per la corrente abbiamo

$$J^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow (b + a^\dagger)(a + b^\dagger) \quad (\text{C.86})$$

ed il termine $b b^\dagger$ ha valor medio non nullo sul vuoto.

Il prodotto N -ordinato implica che in ogni addendo, gli operatori di creazione precedano quelli di annichilazione, dunque

$$: (b + a^\dagger)(a + b^\dagger) : \equiv : (b a + b b^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger b^\dagger) : = b a - b^\dagger b + a^\dagger a + a^\dagger b^\dagger \quad (\text{C.87})$$

dove, per giungere a questa espressione, si è usato il fatto che

$$b b^\dagger = -b^\dagger b + \{b, b^\dagger\} \quad (\text{C.88})$$

e l'anticommutatore, che è un c-numero, è stato quindi sottratto.

A questa stessa espressione (C.87) si può giungere se prendiamo l'espressione della corrente data dalla (C.92). Usando gli stessi simboli di cui sopra, si ha infatti

$$\begin{aligned} & \frac{e}{2} [\bar{\psi}, \gamma^\mu \psi] \rightarrow \frac{e}{2} [b + a^\dagger, a + b^\dagger] = \frac{e}{2} [(b + a^\dagger)(a + b^\dagger) - (a + b^\dagger)(b + a^\dagger)] = \\ & = \frac{e}{2} [b a + b b^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger b^\dagger - a b - a a^\dagger - b^\dagger b - b^\dagger a^\dagger] = \\ & = \frac{e}{2} [2 b a + 2 a^\dagger b^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger a - \{a^\dagger, a\} - b^\dagger b - b^\dagger b + \{b^\dagger, b\}] = \\ & = e [b a + a^\dagger b^\dagger + a^\dagger a + -b^\dagger b] \end{aligned} \quad (\text{C.89})$$

dove si sono usate le relazioni

$$a a^\dagger = -a^\dagger a + \{a^\dagger, a\}; \quad b b^\dagger = -b^\dagger b + \{b^\dagger, b\}; \quad e \quad \{a^\dagger, a\} = \{b^\dagger, b\} \quad (\text{C.90})$$

²³⁵cfr. J.D. Bjorken and S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, Mc Graw-Hill 1965, pag. 91

Se adesso ricordiamo le osservazioni precedenti secondo le quali, ragionevolmente, la trasformazione di coniugazione di carica C deve legare ψ con $\bar{\psi}^t$ e $\bar{\psi}$ con ψ^t , unitamente alla esigenza già ricordata per cui vogliamo che risulti

$$C : \quad J^\mu(x) \rightarrow -J^\mu(x) \quad (C.95)$$

tutto questo ci suggerisce di cercare C in modo che *scambi* semplicemente i due addendi nella (C.94), i.e.²³⁶

$$C : \quad \psi \rightarrow \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t e^{-i\eta_C} \quad (C.98)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow -\psi^t \mathcal{C} e^{i\eta_C} \quad (C.99)$$

dove \mathcal{C} dovrà essere una matrice 4×4 tale che

$$\mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^t \Leftrightarrow (\mathcal{C}^{-1})^t (\gamma^\mu)^t \mathcal{C}^t = -\gamma^\mu \quad (C.100)$$

In questo caso, infatti, avremo evidentemente che

$$\begin{aligned} C : J^\mu &\rightarrow \frac{e}{2} \left\{ -\psi^t \mathcal{C} e^{i\eta_C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t e^{-i\eta_C} - [\mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t e^{-i\eta_C}]^t (\gamma^\mu)^t [-\psi^t \mathcal{C} e^{i\eta_C}]^t \right\} = \\ &= \frac{e}{2} \left\{ -\psi^t \mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t + \bar{\psi} (\mathcal{C}^{-1})^t (\gamma^\mu)^t \mathcal{C}^t \psi \right\} = \\ &= \frac{e}{2} \left\{ \psi^t (\gamma^\mu)^t \bar{\psi}^t - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right\} = -J^\mu \end{aligned} \quad (C.101)$$

Ma vediamo ora se una matrice \mathcal{C} che soddisfi la condizione (C.100) esiste ! Per esplicitarla ci porremo, al solito, nella rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ^μ , dove

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (C.102)$$

²³⁶Siccome, evidentemente, i campi ψ e $\bar{\psi}$ non sono indipendenti, le due leggi di trasformazione (C.98) e (C.99) devono essere compatibili. Assumendo che valga, per esempio, la prima, ne segue allora che, avendo assunto C unitario, risulta

$$\begin{aligned} C \psi C^{-1} &= e^{-i\eta_C} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t \Rightarrow C \bar{\psi} C^{-1} = C \psi^+ \gamma^0 C^{-1} = C \psi^+ C^{-1} \gamma^0 C^{-1} = \\ &= (C \psi C^{-1})^+ \gamma^0 = (e^{-i\eta_C} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t)^+ \gamma^0 = e^{i\eta_C} (\bar{\psi}^t)^+ (\mathcal{C}^{-1})^+ \gamma^0 = \\ &= e^{i\eta_C} [(\psi^+ \gamma^0)^t]^+ (\mathcal{C}^{-1})^+ \gamma^0 = e^{i\eta_C} [\gamma^0 (\psi^+)^t]^+ (\mathcal{C}^{-1})^+ \gamma^0 = \\ &= e^{i\eta_C} \psi^t \gamma^0 (\mathcal{C}^{-1})^+ \gamma^0 \end{aligned} \quad (C.96)$$

dove abbiamo usato il fatto che γ^0 è simmetrica e reale (quindi anche hermitiana). Affinché valga la (C.99), occorre e basta, dunque, che valga la (C.98) e che la matrice \mathcal{C} sia tale per cui

$$\gamma^0 (\mathcal{C}^{-1})^+ \gamma^0 = -\mathcal{C} \quad (C.97)$$

essendo σ_i le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.103})$$

Dalla loro definizione segue immediatamente che, essendo evidentemente

$$(\sigma_1)^t = \sigma_1 ; \quad (\sigma_2)^t = -\sigma_2 ; \quad (\sigma_3)^t = \sigma_3 \quad (\text{C.104})$$

risulta

$$(\gamma^0)^t = \gamma^0 \quad (\text{C.105})$$

$$(\gamma^1)^t = -\gamma^1 \quad (\text{C.106})$$

$$(\gamma^2)^t = \gamma^2 \quad (\text{C.107})$$

$$(\gamma^3)^t = -\gamma^3 \quad (\text{C.108})$$

per cui la condizione (C.100) diviene quindi

$$\mathcal{C} \gamma^0 \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^0)^t = -\gamma^0 \quad (\text{C.109})$$

$$\mathcal{C} \gamma^1 \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^1)^t = \gamma^1 \quad (\text{C.110})$$

$$\mathcal{C} \gamma^2 \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^2)^t = -\gamma^2 \quad (\text{C.111})$$

$$\mathcal{C} \gamma^3 \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^3)^t = \gamma^3 \quad (\text{C.112})$$

D'altronde ricordiamo che

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \quad (\text{C.113})$$

ovvero che le γ con indice diverso anticommutano, mentre

$$(\gamma^0)^2 = I = -(\gamma^1)^2 = -(\gamma^2)^2 = -(\gamma^3)^2 \quad (\text{C.114})$$

Proviamo dunque a porre

$$\mathcal{C} = i \gamma^0 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.115})$$

Risulta intanto evidente che \mathcal{C} è reale e tale da soddisfare la (C.97), infatti

$$\mathcal{C}^{-1} = -i (\gamma^2)^{-1} (\gamma^0)^{-1} = i \gamma^2 \gamma^0 = -i \gamma^0 \gamma^2 = -\mathcal{C} \quad (\text{C.116})$$

$$\mathcal{C}^t = i (\gamma^2)^t (\gamma^0)^t = i \gamma^2 \gamma^0 = -i \gamma^0 \gamma^2 = -\mathcal{C} \quad (\text{C.117})$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^+ = -\mathcal{C} ; \quad \mathcal{C}^2 = -I \quad (\text{C.118})$$

$$\Rightarrow \gamma^0 (\mathcal{C}^{-1})^+ \gamma^0 = \gamma^0 \mathcal{C} \gamma^0 = -\mathcal{C} \quad (\text{C.119})$$

Quanto poi alle sue proprietà di commutazione con le matrici γ^μ , si ha

$$\mathcal{C} \gamma^0 \mathcal{C}^{-1} = \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^2 = \gamma^0 \gamma^2 I \gamma^2 = \gamma^0 (\gamma^2)^2 = -\gamma^0 \quad (\text{C.120})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \gamma^1 \mathcal{C}^{-1} &= \gamma^0 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^0 \gamma^2 = -\gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 = (\gamma^0)^2 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^2 = \\ &= \gamma^2 \gamma^1 \gamma^2 = -(\gamma^2)^2 \gamma^1 = \gamma^1 \end{aligned} \quad (\text{C.121})$$

$$\mathcal{C} \gamma^2 \mathcal{C}^{-1} = \gamma^0 \gamma^2 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 = \gamma^0 (\gamma^2)^2 \gamma^0 \gamma^2 = -(\gamma^0)^2 \gamma^2 = -\gamma^2 \quad (\text{C.122})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \gamma^3 \mathcal{C}^{-1} &= \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^2 = -\gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^3 \gamma^2 = (\gamma^0)^2 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^2 = \\ &= \gamma^2 \gamma^3 \gamma^2 = -(\gamma^2)^2 \gamma^3 = \gamma^3 \end{aligned} \quad (\text{C.123})$$

Resta così dimostrato che la matrice \mathcal{C} definita dalla (C.115) soddisfa effettivamente le condizioni (C.100) e (C.97) e quindi può essere usata per definire l'operatore C sui campi spinoriali ψ e $\bar{\psi}$, in accordo con la (C.98) e la (C.99), in modo che la corrente J^μ soddisfi²³⁷ la (C.95).

Evidentemente però, se ψ e $\bar{\psi}$ si trasformano sotto C secondo la (C.98) e (C.99), queste stesse leggi di trasformazione definiscono univocamente anche l'azione di C sugli operatori di creazione e distruzione di particella e antiparticella.

Qual è dunque il modo di agire di C su questi operatori ?

E' facile convincersi che, effettivamente, così come avevamo ipotizzato, risulta semplicemente che

$$C a^{\dagger(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{in_c} b^{\dagger(r)}(\vec{p}) \quad (\text{C.124})$$

$$C a^{(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{-in_c} b^{(r)}(\vec{p}) \quad (\text{C.125})$$

$$C b^{\dagger(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{-in_c} a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \quad (\text{C.126})$$

$$C b^{(r)}(\vec{p}) C^{-1} = e^{in_c} a^{(r)}(\vec{p}) \quad (\text{C.127})$$

Consideriamo infatti, come esempio, il caso del campo ψ .

Usando le (C.124)-(C.127), otteniamo (si ricordi che, per ipotesi, C è lineare e

²³⁷Si osservi che, volendo usare la definizione consueta di $J^\mu(x)$ avremmo potuto giungere al risultato corretto ma al prezzo di qualche forzatura ... Vediamo come. Partiamo dunque da

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \rightarrow J_C^\mu \equiv C J^\mu C^{-1} = \bar{\psi}_C \gamma^\mu \psi_C = \psi^t C^{-1} \gamma^\mu C^{-1} \bar{\psi}^t = \psi^t (\gamma^\mu)^t \bar{\psi}^t$$

Potrebbe ora sembrare che, essendo $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ una matrice 1×1 , sia

$$\psi^t (\gamma^\mu)^t \bar{\psi}^t = (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^t = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

ma questo è errato nel primo passaggio poiché stiamo scambiando fra loro di posto operatori di creazione/distruzione che anticommutano, senza tenerne conto ! Se ne teniamo conto ed *ignoriamo* il valore non nullo degli anticommutatori fra operatori di creazione e distruzione che si riferiscono entrambi alla particella o alla antiparticella, allora otteniamo il risultato corretto

$$J_C^\mu = \psi^t (\gamma^\mu)^t \bar{\psi}^t = -(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^t = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = -J^\mu$$

ma è del tutto evidente che la strada seguita non è corretta proprio perché ci forza ad ignorare i contributi degli anticommutatori di cui sopra che, invece, non entrano in gioco quando si assuma la forma N-ordinata di J^μ ...

non antilineare ...)

$$\begin{aligned}
C \psi(x) C^{-1} &= C \left\{ \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \left[a^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx} \right] \right\} C^{-1} = \\
&= e^{-in_c} \left\{ \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \left[b^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx} \right] \right\} \quad (C.128)
\end{aligned}$$

Osserviamo adesso che, dalla definizione segue che

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} u^{(r)}(\vec{p}) &= \mathcal{C} \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} u_0^{(r)} = \mathcal{C} \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} u_0^{(r)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} (p_\mu \mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} + m) \mathcal{C} u_0^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} (-p_\mu (\gamma^\mu)^t + m) \mathcal{C} u_0^{(r)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} (m - \not{p})^t \mathcal{C} u_0^{(r)} \quad (C.129)
\end{aligned}$$

D'altronde, dalla definizione (C.115) della matrice \mathcal{C} e da quella degli spinori $u_0^{(r)}$ e $v_0^{(r)}$ (C.68), risulta

$$\mathcal{C} u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v_0^{(1)} \quad (C.130)$$

$$\mathcal{C} u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v_0^{(2)} \quad (C.131)$$

quindi possiamo scrivere che

$$\mathcal{C} u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{-1}{\sqrt{m + E_p}} (m - \not{p})^t v_0^{(r)} \quad (C.132)$$

D'altronde, essendo $v_0^{(r)}$ reale e γ^0 simmetrica, si ha

$$v_0^{(r)} = -\gamma^0 v_0^{(r)} = -\left(v_0^{(r)t} (\gamma^0)^t\right)^t = -\left(v_0^{+(r)} \gamma^0\right)^t = -\left(\bar{v}_0^{(r)}\right)^t \quad (C.133)$$

e dunque risulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} u^{(r)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} (m - \not{p})^t \left(\bar{v}_0^{(r)}\right)^t = \left[\bar{v}_0^{(r)} \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E_p}}\right]^t = \\
&= \left(\bar{v}^{(r)}(\vec{p})\right)^t \quad (C.134)
\end{aligned}$$

Analogamente abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} v^{(r)}(\vec{p}) &= \mathcal{C} \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} v_0^{(r)} = \mathcal{C} \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} v_0^{(r)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} (m - p_\mu \mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1}) \mathcal{C} v_0^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} (m + p_\mu (\gamma^\mu)^t) \mathcal{C} v_0^{(r)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} (m + \not{p})^t \mathcal{C} v_0^{(r)} \tag{C.135}
\end{aligned}$$

D'altronde, siccome $\mathcal{C}^2 = -1$, ecco che

$$\mathcal{C} u_0^{(r)} = -v_0^{(r)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} v_0^{(r)} = u_0^{(r)} \tag{C.136}$$

dunque

$$\mathcal{C} v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} (m + \not{p})^t u_0^{(r)} \tag{C.137}$$

ma, al solito, essendo $u_0^{(r)}$ reale e γ^0 simmetrica, si ha

$$u_0^{(r)} = \gamma^0 u_0^{(r)} = (u_0^{(r)t} (\gamma^0)^t)^t = (u_0^{+(r)} \gamma^0)^t = (\bar{u}_0^{(r)})^t \tag{C.138}$$

e dunque risulta ancora che

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} v^{(r)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{m + E_p}} (m + \not{p})^t (\bar{u}_0^{(r)})^t = \left[\bar{u}_0^{(r)} \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} \right]^t = \\
&= (\bar{u}^{(r)}(\vec{p}))^t \tag{C.139}
\end{aligned}$$

Usiamo adesso questi due risultati (C.134) e (C.139) nella (C.128): si ha

$$\begin{aligned}
C \psi(x) C^{-1} &= e^{-i\eta_c} \left\{ \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} [b^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx}] \right\} = \\
&= e^{-i\eta_c} \left\{ \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} [b^{(r)}(\vec{p}) \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx}] \right\} = \\
&= \mathcal{C}^{-1} e^{-i\eta_c} \left\{ \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} [b^{(r)}(\vec{p}) (\bar{v}^{(r)}(\vec{p}))^t e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p}) (\bar{u}^{(r)}(\vec{p}))^t e^{ipx}] \right\} = \\
&= e^{-i\eta_c} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t(x)
\end{aligned}$$

ovvero

$$C \psi(x) C^{-1} = e^{-i\eta_c} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t(x) \tag{C.140}$$

In modo del tutto analogo si può dimostrare poi che risulta altresì

$$C \bar{\psi}(x) C^{-1} = -e^{i\eta_C} \psi^t(x) \mathcal{C} \quad (\text{C.141})$$

In realtà non è necessario ripetere la dimostrazione²³⁸ in quanto, come abbiamo già osservato, se \mathcal{C} soddisfa la (C.97), ovvero la condizione $\gamma^0(\mathcal{C})^+ \gamma^0 = -\mathcal{C}$ allora, nell'ipotesi che C sia unitario, risulta che

$$C \psi(x) C^{-1} = e^{-i\eta_C} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t(x) \quad (\text{C.145})$$

$$\Leftrightarrow C \bar{\psi} C^{-1} = -e^{i\eta_C} \psi^t \mathcal{C} \quad (\text{C.146})$$

Le (C.124)-(C.127) definiscono dunque una trasformazione C che scambia particella ed antiparticella e soddisfa le condizioni (C.98) e (C.99), ovvero che è tale per cui

$$C : \quad J^\mu(x) \rightarrow -J^\mu(x) \quad (\text{C.147})$$

Ma è una simmetria ?

Proprio perché è tale per cui vale la (C.147), possiamo senz'altro dire fin d'ora che se lo è per il campo libero, lo è anche per quanto riguarda l'interazione del campo elettromagnetico con la corrente prodotta dal campo spinoriale.

Per il campo libero dobbiamo verificare ancora sia l'invarianza della densità lagrangiana che la coerenza della trasformazione con l'algebra dei campi, ovvero con le loro regole di anticommutazione.

Iniziamo da queste ultime. Per gli unici anticommutatori non nulli si ha

$$C : \quad \{a^{(r)}(\vec{p}), a^{\dagger(s)}(\vec{q})\} \longleftrightarrow \{b^{(r)}(\vec{p}), b^{\dagger(s)}(\vec{q})\} \quad (\text{C.148})$$

e siccome le regole di anticommutazione canoniche (C.65) ci dicono che esse coincidono per gli operatori di particella e di antiparticella, possiamo concludere che,

²³⁸Formalmente risulta infatti che se

$$C \psi(x) C^{-1} = e^{-i\eta_C} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t(x) \quad (\text{C.142})$$

allora, essendo C , per ipotesi, unitaria, risulta

$$\begin{aligned} C \bar{\psi} C^{-1} &= C \psi^\dagger \gamma^0 C^{-1} = C \psi^\dagger C^{-1} \gamma^0 = C \psi^\dagger C^\dagger \gamma^0 = (C \psi C^{-1})^\dagger \gamma^0 = \\ &= (e^{-i\eta_C} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t)^\dagger \gamma^0 = e^{i\eta_C} (\bar{\psi}^t)^\dagger (\mathcal{C}^{-1})^+ \gamma^0 \end{aligned} \quad (\text{C.143})$$

ma, per quanto visto precedentemente, essendo $(\mathcal{C}^{-1})^+ = \mathcal{C}$, e $\gamma^0 = (\gamma^0)^t = (\gamma^0)^+$, risulta infine

$$\begin{aligned} C \bar{\psi} C^{-1} &= e^{i\eta_C} \left[(\psi^\dagger \gamma^0)^t \right]^\dagger \mathcal{C} \gamma^0 = e^{i\eta_C} [(\gamma^0)^t (\psi^t)^\dagger]^\dagger \mathcal{C} \gamma^0 = \\ &= e^{i\eta_C} \psi^t \gamma^0 \mathcal{C} \gamma^0 = -e^{i\eta_C} \psi^t \mathcal{C} \end{aligned} \quad (\text{C.144})$$

effettivamente, la trasformazione C definita dalle (C.124) - (C.127) è senz'altro compatibile con l'algebra del campo di Dirac.

Veniamo ora alla dimostrazione della sua compatibilità con la dinamica.

Partiamo al solito dalla densità lagrangiana del campo di Dirac

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi \quad (\text{C.149})$$

ed osserviamo che la trasformazione C sui campi ψ e $\bar{\psi}$ è tale che²³⁹

$$C : \quad x \rightarrow x \quad (\text{C.152})$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi_C(x) = e^{-i\eta_C} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t(x) \Leftrightarrow \bar{\psi} = e^{i\eta_C} \psi_C^t \mathcal{C}^{-1} \quad (\text{C.153})$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}_C(x) = -e^{i\eta_C} \psi^t(x) \mathcal{C} \Leftrightarrow \psi = -e^{-i\eta_C} \mathcal{C} \bar{\psi}_C^t \quad (\text{C.154})$$

L'invarianza in valore della lagrangiana garantisce che l'evoluzione dei campi trasformati ψ_C e $\bar{\psi}_C$ è retta dalla densità lagrangiana seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C(x) &= \frac{i}{2} [(e^{i\eta_C} \psi_C^t \mathcal{C}^{-1}) \gamma^\mu (-\partial_\mu e^{-i\eta_C} \mathcal{C} \bar{\psi}_C^t) - (\partial_\mu e^{i\eta_C} \psi_C^t \mathcal{C}^{-1}) \gamma^\mu (-e^{-i\eta_C} \mathcal{C} \bar{\psi}_C^t)] + \\ &+ m e^{i\eta_C} \psi_C^t \mathcal{C}^{-1} e^{-i\eta_C} \mathcal{C} \bar{\psi}_C^t \end{aligned} \quad (\text{C.155})$$

Iniziamo allora con il considerare il termine di massa. Si ha

$$m e^{i\eta_C} \psi_C^t \mathcal{C}^{-1} e^{-i\eta_C} \mathcal{C} \bar{\psi}_C^t = m \psi_C^t \bar{\psi}_C^t = m (\psi_C)_\alpha (\bar{\psi}_C)_\alpha \quad (\text{C.156})$$

dove la somma sulle componenti dei campi, individuate dall'indice α , si estende, ovviamente, da 1 a 4.

Questo termine, apparentemente, è opposto a quello che compare nella densità lagrangiana originaria del campo di Dirac, dove il termine di massa è appunto espresso dal termine

$$-m \bar{\psi} \psi = -m \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha \quad (\text{C.157})$$

In realtà occorre ricordare, di nuovo, che i prodotti che compaiono nella densità lagrangiana vanno sempre intesi come *normal-ordinati* e siccome ψ e $\bar{\psi}$ anticommutano, evidentemente è

$$: \psi \bar{\psi} : = - : \bar{\psi} \psi : \quad (\text{C.158})$$

²³⁹Abbiamo infatti che (si ricordi che $\mathcal{C}^t = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$)

$$\psi_C = e^{-i\eta_C} \mathcal{C}^{-1} \bar{\psi}^t \Rightarrow \psi_C^t = e^{-i\eta_C} \bar{\psi} (\mathcal{C}^{-1})^t = e^{-i\eta_C} \bar{\psi} \mathcal{C} \Rightarrow \bar{\psi} = e^{i\eta_C} \psi_C^t \mathcal{C}^{-1} \quad (\text{C.150})$$

e così pure risulta

$$\bar{\psi}_C = -e^{i\eta_C} \psi^t \mathcal{C} \Rightarrow \bar{\psi}_C^t = -e^{i\eta_C} \mathcal{C}^t \psi \Rightarrow \psi = -e^{-i\eta_C} (\mathcal{C}^t)^{-1} \bar{\psi}_C^t = -e^{-i\eta_C} \mathcal{C} \bar{\psi}_C^t \quad (\text{C.151})$$

per cui, in definitiva, il termine di massa (C.156) coincide effettivamente con quello canonico, presente nella densità lagrangiana di Dirac.

Veniamo ora agli altri due termini, i.e. alle quantità

$$\begin{aligned} & \left(e^{i\eta_C} \psi_C^t \mathcal{C}^{-1} \right) \gamma^\mu \left(-\partial_\mu e^{-i\eta_C} \mathcal{C} \bar{\psi}_C^t \right) - \left(\partial_\mu e^{i\eta_C} \psi_C^t \mathcal{C}^{-1} \right) \gamma^\mu \left(-e^{-i\eta_C} \mathcal{C} \bar{\psi}_C^t \right) = \\ & = -\psi_C^t \left(\mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} \right) \left(\partial_\mu \bar{\psi}_C^t \right) + \left(\partial_\mu \psi_C^t \right) \left(\mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} \right) \bar{\psi}_C^t \end{aligned} \quad (\text{C.159})$$

D'altronde, essendo $\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$, evidentemente si ha

$$\mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^t \Leftrightarrow \mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^t \quad (\text{C.160})$$

e dunque i due termini di cui sopra diventano

$$\psi_C^t (\gamma^\mu)^t \left(\partial_\mu \bar{\psi}_C^t \right) - \left(\partial_\mu \psi_C^t \right) (\gamma^\mu)^t \bar{\psi}_C^t \quad (\text{C.161})$$

ovvero, esplicitamente

$$\begin{aligned} & (\psi_C)_\alpha \gamma_{\beta\alpha}^\mu (\partial_\mu \bar{\psi}_C)_\beta - (\partial_\mu \psi_C)_\alpha \gamma_{\beta\alpha}^\mu (\bar{\psi}_C)_\beta = \\ & = \gamma_{\beta\alpha}^\mu \left[(\psi_C)_\alpha (\partial_\mu \bar{\psi}_C)_\beta - (\partial_\mu \psi_C)_\alpha (\bar{\psi}_C)_\beta \right] \end{aligned} \quad (\text{C.162})$$

da confrontare con gli analoghi termini della densità lagrangiana di Dirac originaria

$$\bar{\psi}_\beta (\gamma^\mu)_{\beta\alpha} (\partial_\mu \psi)_\alpha - (\partial_\mu \bar{\psi})_\beta (\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \psi_\alpha = \gamma_{\beta\alpha}^\mu \left[\bar{\psi}_\beta (\partial_\mu \psi)_\alpha - (\partial_\mu \bar{\psi})_\beta \psi_\alpha \right] \quad (\text{C.163})$$

ed è allora evidente che, tenendo conto, di nuovo del *normal-ordering* e le regole di anticommutazione dei campi, i due termini hanno la stessa forma.

Ricordiamo di nuovo che un metodo equivalente per verificare che i campi ψ e ψ_C (e dunque anche $\bar{\psi}$ e $\bar{\psi}_C$...) hanno la stessa dinamica è, naturalmente, quello di dimostrare che l'hamiltoniana libera H_0 del campo di Dirac risulta essere C -invariante.

Richiamiamo, a questo scopo, l'espressione di H_0 in termini degli operatori di creazione e distruzione. Risulta

$$H_0 = \sum_r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[E_p a^{(r)\dagger}(\vec{p}) a^{(r)}(\vec{p}) + E_p b^{(r)\dagger}(\vec{p}) b^{(r)}(\vec{p}) \right] \quad (\text{C.164})$$

ed è evidente, allora, che, siccome risulta

$$C a^\dagger a C^{-1} = b^\dagger b; \quad C b^\dagger b C^{-1} = a^\dagger a$$

l'operatore C commuta effettivamente con H_0 .

Dato che l'operatore C rispetta anche l'algebra dei campi essa è dunque una *simmetria conservata* anche per il campo di Dirac, la quale rimane tale anche in presenza di interazione elettromagnetica, per il fatto che inverte il segno della densità di corrente ...

Prima di concludere l'argomento, veniamo ad un'ultima osservazione concernente il fattore di fase $e^{i\eta_C}$, detto anche *parità di carica intrinseca* della particella. Come si è visto, almeno nei casi esaminati, essa è, a priori, arbitraria, con la sola eccezione del caso delle particelle che coincidono con le loro antiparticelle, per le quali può solo essere

$$e^{i\eta_C} = \pm 1 \quad (\text{C.165})$$

dovendo essere $C^2 = 1$.

Il fotone è una di queste e, come sappiamo, ha parità di carica intrinseca pari a -1 , i.e.

$$C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \quad (\text{C.166})$$

La conoscenza della parità di carica intrinseca del fotone (e, eventualmente, di altre particelle) viene usata per fissare quella di altre particelle, sulla base dell'esistenza di un decadimento di queste ultime che sappiamo avvenire attraverso una interazione che conserva C (come l'interazione elettromagnetica o l'interazione forte) e coinvolge fotoni e/o altri autostati di C di autovalore noto. Naturalmente, la bontà della conclusione deve essere poi verificata attraverso altri decadimenti che non contraddicano la conclusione così tratta !

C.3 La Parità

Classicamente la simmetria di parità P è la simmetria legata all'inversione degli assi spaziali, i.e.

$$P : \quad \vec{x} \rightarrow -\vec{x} ; \quad t \rightarrow t \quad (C.167)$$

Secondo questa simmetria, quindi, ci aspettiamo che le grandezze vettoriali cambino di segno, mentre quelle pseudovettoriali non lo facciano. Per esempio, ci aspettiamo che

$$P : \quad \vec{p} \rightarrow -\vec{p} ; \quad \vec{J} \rightarrow \vec{J} \quad (C.168)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \rightarrow -\vec{E}(-\vec{x}, t) ; \quad \vec{B}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{B}(-\vec{x}, t) \quad (C.169)$$

$$A^\mu(\vec{x}, t) \rightarrow A_\mu(-\vec{x}, t) ; \quad (C.170)$$

E per quanto riguarda gli stati ?

Abbiamo già visto, nello schema di prima quantizzazione, che l'operatore P , che descrive la trasformazione di parità, può essere definito in modo che sia una simmetria unitaria tale che

$$P^2 = I \quad (C.171)$$

Se prendiamo allora, per esempio, una base di autostati simultanei dell'impulso e della componente z dello spin, questa simmetria dovrà agire in modo che

$$P | \vec{p}, s > \equiv e^{i\eta_P} | -\vec{p}, s > \quad (C.172)$$

e la fase η_P dovrà essere la stessa su tutti i vettori con cui si possono fare sovrapposizioni lineari, se vogliamo che

$$P [\alpha | \vec{p}, s_1 > + \beta | \vec{q}, s_2 >] \propto \alpha | -\vec{p}, s_1 > + \beta | -\vec{q}, s_2 > \quad (C.173)$$

Questo implica che, limitandoci per esempio solo allo spazio degli stati di particella singola, η_P sia unica su tutto lo spazio. D'altronde

$$P^2 = I \Rightarrow e^{2i\eta_P} = 1 \quad (C.174)$$

e dunque

$$e^{i\eta_P} = \pm 1 = e^{-i\eta_P} \quad (C.175)$$

Passiamo adesso a vedere quale può essere l'azione di P sul campo scalare carico. Da quanto abbiamo detto, segue che ci aspettiamo che risulti

$$P | a(\vec{p}) > = e^{i\eta_P} | a(-\vec{p}) > \quad (C.176)$$

$$P | b(\vec{p}) > = e^{i\chi_P} | b(-\vec{p}) > \quad (C.177)$$

ovvero, assunto di nuovo che il vuoto $|\Omega\rangle$ sia P -invariante, possiamo richiedere agli operatori di creazione di particella e antiparticella di essere tali per cui

$$P a^\dagger(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_P} a^\dagger(-\vec{p}) \quad (\text{C.178})$$

$$P b^\dagger(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\chi_P} b^\dagger(-\vec{p}) \quad (\text{C.179})$$

e quindi, essendo P per ipotesi unitaria, sarà altresì

$$P a(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_P} a(-\vec{p}) \quad (\text{C.180})$$

$$P b(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\chi_P} b(-\vec{p}) \quad (\text{C.181})$$

A priori le fasi η_P e χ_P possono essere considerate come indipendenti, visto che riguardano una la particella e l'altra l'antiparticella. Comunque, poiché i campi ϕ e ϕ^\dagger contengono entrambi operatori sia di particella che di antiparticella, solo un legame fra le due fasi consentirà di giungere a leggi di trasformazione semplici per i campi stessi.

Usando questo ulteriore vincolo, possiamo facilmente convincersi che deve essere²⁴⁰

$$\chi_P = -\eta_P \quad (\text{C.183})$$

e dunque

$$P a^\dagger(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_P} a^\dagger(-\vec{p}) \quad (\text{C.184})$$

$$P a(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_P} a(-\vec{p}) \quad (\text{C.185})$$

$$P b^\dagger(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_P} b^\dagger(-\vec{p}) \quad (\text{C.186})$$

$$P b(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_P} b(-\vec{p}) \quad (\text{C.187})$$

Quanto ai campi, definendo per comodità

$$Px = P(x^0, \vec{x}) \equiv (x^0, -\vec{x}) \quad (\text{C.188})$$

$$\phi_P(x) \equiv \phi_P(x^0, \vec{x}) = P \phi(x) P^{-1} \equiv P \phi(x^0, \vec{x}) P^{-1} \quad (\text{C.189})$$

risulta allora che

$$\begin{aligned} \phi_P(x) = P \phi(x) P^{-1} &= e^{-i\eta_P} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ a(-\vec{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(-\vec{p}) e^{ipx} \right\} = \\ &= e^{-i\eta_P} \phi(x^0, -\vec{x}) \equiv e^{-i\eta_P} \phi(Px) \end{aligned} \quad (\text{C.190})$$

²⁴⁰Ricordando comunque che

$$e^{i\eta_P} = \pm 1 = e^{-i\eta_P} \quad (\text{C.182})$$

e, analogamente (si ricordi comunque che $e^{i\eta_P} = e^{-i\eta_P}$)

$$\begin{aligned}\phi_P^\dagger(x) = P \phi^\dagger(x) P^{-1} &= e^{i\eta_P} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ b(-\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(-\vec{p}) e^{ipx} \right\} = \\ &= e^{i\eta_P} \phi^\dagger(x^0, -\vec{x}) \equiv e^{i\eta_P} \phi^\dagger(Px)\end{aligned}\quad (\text{C.191})$$

in perfetto accordo con quanto potevamo attenderci in base all'analogia classica.

E' banale dimostrare adesso che questa legge di trasformazione è compatibile con le regole di commutazione del campo.

Come sappiamo, infatti, l'algebra del campo scalare è definita univocamente dalle regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione e gli unici commutatori non nulli sono

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{q})] = 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (\text{C.192})$$

D'altronde, sotto parità, gli operatori di creazione e distruzione di particella e antiparticella restano tali, solo che si invertono i segni degli impulsi, i.e.

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p} \quad ; \quad \vec{q} \rightarrow -\vec{q} \quad (\text{C.193})$$

Siccome però la funzione δ è una funzione pari, evidentemente la simmetria di parità P conserva la struttura canonica dell'algebra del campo scalare.

Quanto poi alle equazioni del moto, evidentemente se i campi $\phi(x^0, \vec{x})$ e $\phi^\dagger(x^0, \vec{x})$ soddisfano l'equazione di Klein-Gordon, allora anche i campi

$$\phi_P(x') \equiv \phi_P(x^0, -\vec{x}) = e^{-i\eta_P} \phi(x) \quad (\text{C.194})$$

$$\phi_P^\dagger(x') \equiv \phi_P^\dagger(x^0, -\vec{x}) = e^{i\eta_P} \phi^\dagger(x) \quad (\text{C.195})$$

lo fanno, poiché

$$P : \quad \partial^\mu \rightarrow \partial'_\mu \quad (\text{C.196})$$

e dunque il D'Alembertiano non cambia per parità.

Questo stesso risultato può essere altresì ottenuto formalmente a partire dalla densità lagrangiana, dimostrandone, al solito, l'invarianza in forma sotto P .

Infatti, come ben sappiamo, per il campo scalare abbiamo

$$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) - m^2 \phi \phi^\dagger \quad (\text{C.197})$$

D'altronde, secondo la trasformazione in questione risulta

$$P : \quad x \rightarrow x' = Px \Leftrightarrow x = Px' \quad (\text{C.198})$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi_P(x') = e^{-i\eta_P} \phi(x) \Leftrightarrow \phi(x) = e^{i\eta_P} \phi_P(x') \quad (\text{C.199})$$

$$\phi^\dagger(x) \rightarrow \phi_P^\dagger(x') = e^{i\eta_P} \phi^\dagger(x) \Leftrightarrow \phi^\dagger(x) = e^{-i\eta_P} \phi_P^\dagger(x') \quad (\text{C.200})$$

Ma l'invarianza in valore della lagrangiana ci garantisce che $\phi_P(x')$ e $\phi_P^\dagger(x')$ verificano le equazioni di Eulero-Lagrange ottenute a partire dalla densità lagrangiana (si noti che i due fattori di fase in ϕ e ϕ^\dagger si compensano l'un l'altro)

$$\mathcal{L}_P(x') = (\partial_\mu \phi_P(x'))(\partial^\mu \phi_P^\dagger(x')) - m^2 \phi_P(x')\phi_P^\dagger(x') \quad (\text{C.201})$$

e siccome

$$\partial^\mu \phi_P(x') = \partial'_\mu \phi_P(x') \equiv \partial'_\mu \phi_P; \quad \partial^\mu \phi_P^\dagger(x') = \partial'_\mu \phi_P^\dagger(x') \equiv \partial'_\mu \phi_P^\dagger \quad (\text{C.202})$$

ecco che risulta finalmente che

$$\mathcal{L}_P(x') = (\partial'^\mu \phi_P)(\partial'_\mu \phi_P^\dagger) - m^2 \phi_P \phi_P^\dagger \quad (\text{C.203})$$

ovvero che \mathcal{L} è invariante in forma sotto P e dunque ϕ e ϕ_P hanno la stessa dinamica !

Da tutto questo, segue quindi che P è una simmetria conservata per il campo scalare libero.

Campi per cui $e^{i\eta_P} = +1$ sono detti *campi scalari*, mentre campi per cui $e^{i\eta_P} = -1$ sono detti *campi pseudoscalari* e la quantità $e^{i\eta_P} = \pm 1$ è chiamata anche *parità intrinseca* del campo o della particella considerata.

Si noti infine che, per campi scalari, la parità intrinseca della particella è la stessa di quella dell'antiparticella.

Consideriamo adesso, di nuovo, l'interazione elettromagnetica. Classicamente essa è invariante per parità perché

$$P : \quad J_\mu(x) \rightarrow J^\mu(Px) \quad (\text{C.204})$$

$$A^\mu(x) \rightarrow A_\mu(Px) \quad (\text{C.205})$$

e dunque

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -J_\mu(x)A^\mu(x) \rightarrow -J^\mu(Px)A_\mu(Px) = \mathcal{L}_{int}(Px) \quad (\text{C.206})$$

Volendo mantenere l'analogia, richiederemo senz'altro che sia

$$P : \quad A^\mu(x) \rightarrow A_\mu(Px) \quad (\text{C.207})$$

e ne vedremo fra breve le conseguenze.

Ma per quanto riguarda la densità di corrente associata al campo scalare carico? Come sappiamo, essa è data da

$$J^\mu(x) = i \left[\phi^\dagger(x) (\partial^\mu \phi(x)) - (\partial^\mu \phi^\dagger(x)) \phi(x) \right] \quad (\text{C.208})$$

Come si trasforma per parità ? Si ha

$$\begin{aligned}
P J^0(x^0, \vec{x}) P^{-1} &= i \left[P \phi^\dagger(x) P^{-1} P \partial^0 \phi(x) P^{-1} - P \partial^0 \phi^\dagger(x) P^{-1} P \phi(x) P^{-1} \right] = \\
&= i e^{i\eta_P} e^{-i\eta_P} \left[\phi^\dagger(x') \partial'^0 \phi(x') - \partial'^0 \phi^\dagger(x') \phi(x') \right] = \\
&= J^0(x') \equiv J^0(x^0, -\vec{x}) \equiv J^0(Px)
\end{aligned} \tag{C.209}$$

dove abbiamo usato il fatto che, ovviamente, $\partial^0 = \partial'^0$.

Per quanto riguarda invece le componenti spaziali, proprio perché $\vec{\nabla} = -\vec{\nabla}'$, ripetendo la dimostrazione di cui sopra, si conclude che

$$P \vec{J}(x) P^{-1} = -\vec{J}(x') \equiv -\vec{J}(x^0, -\vec{x}) \equiv -\vec{J}(Px) \tag{C.210}$$

ovvero risulta dimostrato che effettivamente si ha

$$P J^\mu(x) P^{-1} = J_\mu(x') \equiv J_\mu(x^0, -\vec{x}) \equiv J_\mu(Px) \tag{C.211}$$

e questo indipendentemente dal fatto che il campo sia scalare o pseudoscalare.

Per quanto riguarda poi il campo elettromagnetico, abbiamo già detto che, in base al suo significato classico ed alle proprietà note del campo stesso, richiediamo che, anche per il campo quantizzato, accada che

$$P A^\mu(x) P^{-1} = A_\mu(x') \equiv A_\mu(Px) \tag{C.212}$$

Abbiamo già visto che lo sviluppo del campo elettromagnetico in termini di operatori di creazione e distruzione è dato da

$$A^\mu(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a(\vec{p}, s) \epsilon_s^\mu(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}, s) \epsilon_s^{*\mu}(\vec{p}) e^{ipx} \right] \tag{C.213}$$

dove $\epsilon_s^\mu(\vec{p})$ descrive lo stato di polarizzazione²⁴¹ del fotone generato dall'operatore di creazione $a^\dagger(\vec{p}, s)$, quando esso viene applicato al vuoto.

Abbiamo detto che vogliamo che risulti

$$P A^\mu(x^0, \vec{x}) P^{-1} = A_\mu(x^0, -\vec{x}) \tag{C.215}$$

²⁴¹Infatti la funzione d'onda del fotone individuato dallo stato $a^\dagger(\vec{p}, s) |\Omega\rangle$ è data da

$$\begin{aligned}
\psi_s^\mu(x) &= \langle \Omega | A^\mu(x) a^\dagger(\vec{p}, s) | \Omega \rangle = \\
&= \sum_\lambda \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \langle \Omega | [a(\vec{q}, \lambda) \epsilon^\mu(\vec{q}, \lambda) e^{-iqx} + a^\dagger(\vec{q}, \lambda) \epsilon^{*\mu}(\vec{q}, \lambda) e^{iqx}] a^\dagger(\vec{p}, s) | \Omega \rangle = \\
&= \sum_\lambda \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \epsilon^\mu(\vec{q}, \lambda) e^{-iqx} (2\pi)^3 \delta_{s\lambda} \delta(\vec{q} - \vec{p}) 2E_q = \epsilon^\mu(\vec{q}, s) e^{-ipx}
\end{aligned} \tag{C.214}$$

dove si è usato il fatto che $\langle \Omega | a a^\dagger | \Omega \rangle = \langle \Omega | [a, a^\dagger] | \Omega \rangle$ e che $\langle \Omega | a^\dagger a^\dagger | \Omega \rangle = 0$, nonché l'espressione canonica del commutatore, per cui risulta

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = 2E_p (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{p})$$

ovvero, visto che nella gauge di radiazione $A^0 = 0$, questo significa che

$$P \vec{A}(x^0, \vec{x}) P^{-1} = -\vec{A}(x^0, -\vec{x}) \quad (\text{C.216})$$

Cerchiamo allora di vedere che cosa questo implichi sugli operatori di creazione e distruzione del fotone e riprendiamo per questo lo sviluppo consueto del campo A^μ , usando per descrivere lo stato di polarizzazione dei fotoni gli stati con elicità definita. Risulta

$$A^\mu(x^0, \vec{x}) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a(\vec{p}, \lambda) \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}, \lambda) \epsilon^{*\mu}(\vec{p}, \lambda) e^{ipx} \right]$$

dove gli stati di polarizzazione sono quelli di elicità, i.e. $\lambda = \pm 1$, il cui significato, lo ricordiamo, è quello della proiezione del momento angolare nella direzione del moto. Ci aspettiamo dunque che, per parità, visto che il moto si inverte di senso ma il momento angolare no, sia

$$P : \quad \lambda \rightarrow -\lambda \quad (\text{C.217})$$

Proviamo dunque a definire

$$P a(\vec{p}, \lambda) P^{-1} = -a(-\vec{p}, -\lambda) \quad (\text{C.218})$$

$$P a^\dagger(\vec{p}, \lambda) P^{-1} = -a^\dagger(-\vec{p}, -\lambda) \quad (\text{C.219})$$

Risulta allora, usando le relazioni²⁴² sulle polarizzazioni (2.387) e (2.388), che

$$\begin{aligned} P \vec{A}(x^0, \vec{x}) P^{-1} &= - \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a(-\vec{p}, -\lambda) \vec{\epsilon}(\vec{p}, \lambda) e^{-ip^0x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \right. \\ &+ \left. a^\dagger(-\vec{p}, -\lambda) \vec{\epsilon}^*(\vec{p}, \lambda) e^{ip^0x^0-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] = \\ &= - \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a(-\vec{p}, -\lambda) \vec{\epsilon}(-\vec{p}, -\lambda) e^{-ip^0x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \right. \\ &+ \left. a^\dagger(-\vec{p}, -\lambda) \vec{\epsilon}^*(-\vec{p}, -\lambda) e^{ip^0x^0-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \end{aligned}$$

²⁴²Nella *gauge di radiazione*, detta anche *gauge di Coulomb* (nella quale il potenziale scalare soddisfa l'equazione dell'elettrostatica e dunque, in assenza di densità di carica, è nullo) per un'onda che viaggia nella direzione \vec{k} dell'asse z , possiamo scegliere

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) = (1, 0, 0) \quad (\text{C.220})$$

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) = (0, 1, 0) \quad (\text{C.221})$$

e questo corrisponde a scegliere polarizzazioni lineari: per ipotesi, i vettori $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1)$, $\vec{\epsilon}(\vec{k}, 2)$ e $\vec{k}/|\vec{k}|$ formano una terna destrorsa, rispettivamente come gli assi cartesiani x , y , z . Seguendo la convenzione consueta (usata, p.es. anche da Bjorken e Drell), per un'onda che viaggia in verso opposto alla direzione \vec{k} dell'asse z assumeremo altresì che sia

$$\vec{\epsilon}(-\vec{k}, 1) = -\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) \quad (\text{C.222})$$

$$\vec{\epsilon}(-\vec{k}, 2) = \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) \quad (\text{C.223})$$

Un'altra scelta equivalente e molto spesso più comoda è quella di usare polarizzazioni circolari, i.e., sempre per un fotone che viaggia lungo l'asse z

Scambiando allora $\lambda \rightarrow -\mu$ e $\vec{p} \rightarrow -\vec{q}$, si ha

$$\begin{aligned} P \vec{A}(x^0, \vec{x}) P^{-1} &= - \sum_{\mu=\pm 1} \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left[a(\vec{q}, \mu) \vec{\epsilon}(\vec{q}, \mu) e^{-iq^0 x^0 + i\vec{q} \cdot (-\vec{x})} + \right. \\ &\quad \left. + a^\dagger(\vec{q}, \mu) \vec{\epsilon}^*(\vec{q}, \mu) e^{iq^0 x^0 - i\vec{q} \cdot (-\vec{x})} \right] = \\ &= -\vec{A}(x^0, -\vec{x}) \end{aligned} \quad (\text{C.228})$$

che dimostra la (C.216) e quindi la (C.215).

E' facile poi verificare che la legge di trasformazione (C.218)-(C.219)

- rispetta con l'algebra del campo elettromagnetico;
- lascia, evidentemente, invarianti le equazioni del moto

$$\square A^\mu = 0; \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{C.229})$$

in quanto

$$P : \quad \partial_\mu \rightarrow \partial'^\mu; \quad A_\mu(x) \rightarrow A^\mu(Px) \quad (\text{C.230})$$

Quindi P definisce una simmetria conservata per il campo elettromagnetico libero.

Osserviamo, prima di lasciare questo argomento, che, per quanto detto sopra, lo stato di fotone è tale per cui

$$P | \vec{p}, \lambda \rangle = P a^\dagger(\vec{p}, \lambda) P^{-1} P | \Omega \rangle = -a^\dagger(-\vec{p}, -\lambda) | \Omega \rangle = - | -\vec{p}, -\lambda \rangle \quad (\text{C.231})$$

ovvero che il fotone ha *parità intrinseca negativa*.

E veniamo, infine, all'azione della trasformazione di parità sul campo di Dirac. Evidentemente, così come nel caso del campo scalare, affinché P possa continuare ad essere una simmetria conservata in presenza di interazione elettromagnetica, vogliamo che accada che

$$P : \quad J^\mu(x) \rightarrow J_\mu(Px) \quad (\text{C.232})$$

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) - i \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (1, i, 0) \quad \text{elicita}' \lambda = +1 \quad (\text{C.224})$$

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) - i \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i, 0) \quad \text{elicita}' \lambda = -1 \quad (\text{C.225})$$

In questo caso, date le (C.222) e (C.223), risulta

$$\vec{\epsilon}(-\vec{k}, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) - i \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) \right) = \vec{\epsilon}(\vec{k}, -) \quad (\text{C.226})$$

$$\vec{\epsilon}(-\vec{k}, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1) - i \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2) \right) = \vec{\epsilon}(\vec{k}, +) \quad (\text{C.227})$$

Ma procediamo, di nuovo, a partire dallo sviluppo del campo in termini di operatori di creazione e distruzione, tenendo conto dell'analogia classica.

Dovendo, la parità invertire il segno dell'impulso ma non alterare lo stato di spin della particella/antiparticella, possiamo provare a scrivere

$$P a^{\dagger(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_P} a^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \quad (\text{C.233})$$

$$P a^{(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_P} a^{(r)}(-\vec{p}) \quad (\text{C.234})$$

dove la (C.234) discende direttamente dalla (C.233) visto che abbiamo assunto che P sia unitaria.

Per quanto riguarda poi l'azione di P sugli operatori di creazione e distruzione dell'antiparticella, in analogia con quanto accadeva nel caso del campo scalare²⁴³, possiamo provare a porre

$$P b^{\dagger(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_P} b^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \quad (\text{C.235})$$

$$P b^{(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_P} b^{(r)}(-\vec{p}) \quad (\text{C.236})$$

con $e^{i\eta_P} = \pm 1 = e^{-i\eta_P}$, per il fatto che deve comunque essere $P^2 = I$.

Vediamo l'effetto della trasformazione P sopra definita sui campi ψ e $\bar{\psi}$. Si ha

$$\begin{aligned} P \psi(x^0, \vec{x}) P^{-1} &= P \left\{ \sum_r \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx} \right] \right\} P^{-1} = \\ &= e^{-i\eta_P} \sum_r \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a^{(r)}(-\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ip^0 x^0 + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \right. \\ &\quad \left. + b^{\dagger(r)}(-\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ip^0 x^0 - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right] = \\ &= e^{-i\eta_P} \sum_r \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[a^{(r)}(\vec{q}) u^{(r)}(-\vec{q}) e^{-iq^0 x^0 + i\vec{q} \cdot (-\vec{x})} + \right. \\ &\quad \left. + b^{\dagger(r)}(\vec{q}) v^{(r)}(-\vec{q}) e^{iq^0 x^0 - i\vec{q} \cdot (-\vec{x})} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.237})$$

Ma essendo

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} u_0^{(r)} = \frac{p^0 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m}{\sqrt{m + E_p}} u_0^{(r)} \quad (\text{C.238})$$

chiaramente risulta

$$u^{(r)}(-\vec{p}) = \frac{p^0 \gamma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m}{\sqrt{m + E_p}} u_0^{(r)} = \frac{(p^0 \gamma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m) \gamma^0}{\sqrt{m + E_p}} \gamma^0 u_0^{(r)} =$$

²⁴³Ricordiamo a questo proposito che la ragione per cui il fattore di fase che compare nella legge di trasformazione sotto P di b^\dagger sia il complesso coniugato di quello relativo ad a^\dagger , discendeva solo dall'esigenza di avere, alla fine, una legge di trasformazione *semplice* per il campo ϕ . Come vedremo, questa stessa esigenza ci costringerà, nel caso del campo ψ , a giungere ad una diversa conclusione.

$$= \gamma^0 \frac{(p^0 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m)}{\sqrt{m + E_p}} \gamma^0 u_0^{(r)} = \gamma^0 \frac{p^0 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m}{\sqrt{m + E_p}} u_0^{(r)} \quad (\text{C.239})$$

visto che $\gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \gamma^0$ e $\gamma^0 u_0^{(r)} = u_0^{(r)}$. Dunque si ha

$$u^{(r)}(-\vec{p}) = \gamma^0 u^{(r)}(\vec{p}) \quad (\text{C.240})$$

Per quanto riguarda lo spinore $v^{(r)}(\vec{p})$, a sua volta, si ha che, essendo

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E}} v_0^{(r)} \quad (\text{C.241})$$

risulta che

$$\begin{aligned} v^{(r)}(-\vec{p}) &= \frac{m - p^0 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{\sqrt{m + E_p}} v_0^{(r)} = \frac{(m - p^0 \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}) \gamma^0}{\sqrt{m + E_p}} \gamma^0 v_0^{(r)} = \\ &= \gamma^0 \frac{(m - p^0 \gamma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\gamma})}{\sqrt{m + E_p}} (-v_0^{(r)}) \end{aligned} \quad (\text{C.242})$$

essendo stavolta $\gamma^0 v_0^{(r)} = -v_0^{(r)}$. Quindi abbiamo

$$v^{(r)}(-\vec{p}) = -\gamma^0 v^{(r)}(\vec{p}) \quad (\text{C.243})$$

Questo diverso comportamento degli spinori u dagli spinori v richiede un ripensamento delle (C.233)-(C.236).

Se vogliamo, infatti, che il campo ψ si trasformi sotto parità in modo ragionevole, i.e.

$$P \psi(x^0, \vec{x}) P^{-1} \propto \psi(x^0, -\vec{x}) \quad (\text{C.244})$$

allora, mantenendo per gli operatori a e a^\dagger che agiscono sulla particella, le relazioni (C.233) e (C.234) occorre, quanto agli operatori b e b^\dagger che agiscono sull'antiparticella, imporre che soddisfino piuttosto le relazioni seguenti

$$P b^\dagger(\vec{p}) P^{-1} = -e^{-i\eta_P} b^\dagger(-\vec{p}) \quad (\text{C.245})$$

$$P b(\vec{p}) P^{-1} = -e^{i\eta_P} b(-\vec{p}) \quad (\text{C.246})$$

Infatti, in questo caso, per la (C.233) e la (C.245), avremo

$$\begin{aligned} P \psi(x^0, \vec{x}) P^{-1} &= e^{-i\eta_P} \sum_r \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left[a^{(r)}(\vec{q}) u^{(r)}(-\vec{q}) e^{-iq^0 x^0 + i\vec{q} \cdot (-\vec{x})} - \right. \\ &\quad \left. - b^{\dagger(r)}(\vec{q}) v^{(r)}(-\vec{q}) e^{iq^0 x^0 - i\vec{q} \cdot (-\vec{x})} \right] = \\ &= e^{-i\eta_P} \gamma^0 \sum_r \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left[a^{(r)}(\vec{q}) u^{(r)}(\vec{q}) e^{-iq^0 x^0 + i\vec{q} \cdot (-\vec{x})} + \right. \\ &\quad \left. + b^{\dagger(r)}(\vec{q}) v^{(r)}(\vec{q}) e^{iq^0 x^0 - i\vec{q} \cdot (-\vec{x})} \right] = \\ &= e^{-i\eta_P} \gamma^0 \psi(x^0, -\vec{x}) \end{aligned} \quad (\text{C.247})$$

Ovvero, posto al solito

$$\psi_P(x) \equiv P \psi(x) P^{-1} \quad (\text{C.248})$$

risulta

$$\psi_P(x) = e^{-i\eta_P} \gamma^0 \psi(Px) \quad (\text{C.249})$$

Per il campo $\bar{\psi}$, nelle stesse ipotesi, otteniamo evidentemente che²⁴⁴

$$P \bar{\psi}(x^0, \vec{x}) P^{-1} = e^{i\eta_P} \bar{\psi}(x^0, -\vec{x}) \gamma^0 \Rightarrow \bar{\psi}_P(x) = e^{i\eta_P} \bar{\psi}(Px) \gamma^0 \quad (\text{C.251})$$

Quindi, nel caso spinoriale, particella e antiparticella hanno parità intrinseche opposte: se poniamo $e^{i\eta_P} \equiv 1$, la particella ha parità $+1$ e l'antiparticella ha parità -1 , mentre vale l'opposto se $e^{i\eta_P} = -1$.

Cerchiamo ora di vedere se la trasformazione P così definita è una simmetria conservata nel caso del campo spinoriale libero.

E' facile convincersi che P è coerente con l'algebra dei campi in quanto rispetta le regole di anticommutazione. Infatti, per le uniche non nulle, si ha

$$\begin{aligned} \{a^{(r)}(\vec{p}), a^{\dagger(s)}(\vec{q})\} &= 2E_p \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \\ P : \quad \Rightarrow \{e^{-i\eta_P} a^{(r)}(-\vec{p}), e^{i\eta_P} a^{\dagger(s)}(-\vec{q})\} &= 2E_p \delta_{rs} \delta(-\vec{p} + \vec{q}) \equiv 2E_p \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \\ \{b^{(r)}(\vec{p}), b^{\dagger(s)}(\vec{q})\} &= 2E_p \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \\ P : \quad \Rightarrow \{-e^{i\eta_P} b^{(r)}(-\vec{p}), -e^{-i\eta_P} b^{\dagger(s)}(-\vec{q})\} &= 2E_p \delta_{rs} \delta(-\vec{p} + \vec{q}) \equiv 2E_p \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \end{aligned}$$

Veniamo ora alla dinamica. La densità lagrangiana del campo spinoriale, come ben sappiamo, è

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi \quad (\text{C.252})$$

La legge di trasformazione descritta da P è tale per cui

$$P : \quad x \rightarrow x' \equiv P x \quad \Leftrightarrow x = P x' \quad (\text{C.253})$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi_P(x') \equiv e^{-i\eta_P} \gamma^0 \psi(x) \quad \Leftrightarrow \psi(x) = e^{i\eta_P} \gamma^0 \psi_P(x') \quad (\text{C.254})$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}_P(x') \equiv e^{i\eta_P} \bar{\psi}(x) \gamma^0 \quad \Leftrightarrow \bar{\psi}(x) = e^{-i\eta_P} \bar{\psi}_P(x') \gamma^0 \quad (\text{C.255})$$

²⁴⁴Si può procedere formalmente come abbiamo fatto nel caso del campo $\psi(x)$, a partire dalle leggi di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione, oppure si può semplicemente osservare che, dalla legge di trasformazione di $\psi(x)$, segue che

$$\begin{aligned} P \bar{\psi}(x^0, \vec{x}) P^{-1} &= P \psi^+(x) \gamma^0 P^{-1} = P \psi^+(x) P^{-1} \gamma^0 = (P \psi(x) P^{-1})^+ \gamma^0 = \\ &= (e^{-i\eta_P} \gamma^0 \psi(Px))^+ \gamma^0 = e^{i\eta_P} (\gamma^0 \psi(Px))^+ \gamma^0 = e^{i\eta_P} \psi(Px)^+ \gamma^0 \gamma^0 = \\ &= e^{i\eta_P} \bar{\psi}(Px) \gamma^0 \end{aligned} \quad (\text{C.250})$$

dunque l'evoluzione dei campi ψ_P e $\bar{\psi}_P$ è retta dalla densità lagrangiana (invarianza in valore ...)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_P(x') &= \frac{i}{2} \left\{ e^{-i\eta_P} \bar{\psi}_P(x') \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu [e^{i\eta_P} \gamma^0 \psi_P(x')] - \right. \\ &\quad \left. - \partial_\mu [e^{-i\eta_P} \bar{\psi}_P(x') \gamma^0] \gamma^\mu e^{i\eta_P} \gamma^0 \psi_P(x') \right\} - \\ &\quad - m e^{-i\eta_P} \bar{\psi}_P(x') \gamma^0 e^{i\eta_P} \gamma^0 \psi_P(x') = \\ &= \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi}_P \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 (\partial'^\mu \psi_P) - (\partial'^\mu \bar{\psi}_P) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \psi_P \right\} - m \bar{\psi}_P \psi_P \quad (\text{C.256})\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\partial_\mu = \partial'^\mu$ e che $(\gamma^0)^2 = I$.

Poichè $\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma_\mu$, abbiamo immediatamente che

$$\mathcal{L}_P(x') = \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi}_P \gamma_\mu (\partial'^\mu \psi_P) - (\partial'^\mu \bar{\psi}_P) \gamma_\mu \psi_P \right\} - m \bar{\psi}_P \psi_P \quad (\text{C.257})$$

la quale prova che la densità lagrangiana del campo di Dirac risulta invariante in forma per parità e quindi i campi ψ e ψ_P hanno la stessa dinamica.

Resta così dimostrato che la trasformazione P definita da

$$P a^{\dagger(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{i\eta_P} a^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \quad (\text{C.258})$$

$$P a^{(r)}(\vec{p}) P^{-1} = e^{-i\eta_P} a^{(r)}(-\vec{p}) \quad (\text{C.259})$$

$$P b^{\dagger(r)}(\vec{p}) P^{-1} = -e^{i\eta_P} b^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \quad (\text{C.260})$$

$$P b^{(r)}(\vec{p}) P^{-1} = -e^{-i\eta_P} b^{(r)}(-\vec{p}) \quad (\text{C.261})$$

è una simmetria conservata per il campo di Dirac libero.

Vediamo ora che succede, di nuovo, nel caso dell'interazione elettromagnetica. Evidentemente P sarà ancora una simmetria conservata se e solo se

$$P : J^\mu(x) \rightarrow J_\mu(Px) \quad (\text{C.262})$$

Dalle leggi di trasformazione di ψ e $\bar{\psi}$, essendo²⁴⁵

$$J^\mu(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (\text{C.263})$$

abbiamo effettivamente che

$$\begin{aligned}P J^\mu(x) P^{-1} &= e P \bar{\psi} P^{-1} \gamma^\mu P \psi P^{-1} = \\ &= e e^{i\eta_P} \bar{\psi}(Px) \gamma^0 \gamma^\mu e^{-i\eta_P} \gamma^0 \psi(Px) = \\ &= e \bar{\psi}(Px) \gamma_\mu \psi(Px) \equiv J_\mu(Px) \quad (\text{C.264})\end{aligned}$$

dunque risulta così provato che P è una simmetria conservata anche nel caso dell'interazione elettromagnetica, quando la densità di corrente elettrica sia quella associata ad una particella di Dirac.

²⁴⁵Siccome P manda ψ e $\bar{\psi}$ in sé, ovvero non le scambia come fa invece C , non è strettamente necessario usare per J^μ la forma $N - ordinata$. Va da sé comunque che, se la usiamo, continua a valere la (C.262), come il lettore può verificare direttamente.

C.4 L'inversione temporale

Come abbiamo avuto modo di concludere già nell'ambito dello schema di prima quantizzazione della Meccanica Quantistica, l'operatore T di inversione temporale è antiunitario. In quel contesto, ma in tutta generalità, abbiamo altresì osservato che questo operatore è una simmetria conservata del sistema se, dato uno stato $|A\rangle$ al tempo t e lasciato evolvere per un intervallo di tempo Δt in modo da ottenere lo stato $|B\rangle$, allora, preso il suo *riflesso*²⁴⁶ nel tempo $|B\rangle_T$ e lasciato evolvere *con la stessa dinamica* per lo stesso intervallo di tempo Δt , otteniamo di nuovo il *riflesso* nel tempo $|A\rangle_T$ dello stato $|A\rangle$ di partenza.

Classicamente abbiamo già discusso come questa simmetria abbia a che fare con la reversibilità di un processo fisico, associata alla trasformazione

$$t \rightarrow t' = -t \quad (\text{C.266})$$

per quanto concerne il suo effetto sulle variabili cinematiche che definiscono lo stato.

Sotto l'operatore T , dunque, se vogliamo garantire la validità dell'analogia classica, deve accadere, per esempio, che

$$T \vec{X} T^{-1} = \vec{X} \quad (\text{C.267})$$

$$T \vec{P} T^{-1} = -\vec{P} \quad (\text{C.268})$$

$$T \vec{J} T^{-1} = -\vec{J} \quad (\text{C.269})$$

ed inoltre, assunto che la densità di carica sia scalare sotto inversione temporale,

²⁴⁶Per esempio, per uno stato che sia autostato simultaneo dell'impulso, di J^2 e di J_z , il *riflesso* nel tempo si ottiene dallo stato di partenza, invertendo il segno dell'autovalore dell'impulso e della componente z del momento angolare, i.e.

$$T : |\vec{p}, J, m\rangle \rightarrow \propto |-\vec{p}, J, -m\rangle \quad (\text{C.265})$$

dovrà essere altresì che²⁴⁷

$$T \vec{E}(\vec{x}, t) T^{-1} = \vec{E}(\vec{x}, -t); \quad T \vec{B}(\vec{x}, t) T^{-1} = -\vec{B}(\vec{x}, -t) \quad (\text{C.275})$$

$$\Rightarrow T A^\mu(\vec{x}, t) T^{-1} = A_\mu(\vec{x}, -t) \quad (\text{C.276})$$

Siccome, però, evidentemente, sempre sulla base dell'analogia classica, deve essere

$$T J^\mu(\vec{x}, t) T^{-1} = J_\mu(\vec{x}, -t) \quad (\text{C.277})$$

ecco che, l'interazione elettromagnetica, descritta classicamente nella lagrangiana dal termine $J_\mu A^\mu$, risulta essere T -invariante.

Naturalmente vogliamo che questa medesima conclusione rimanga valida anche nell'ambito della teoria quantistica dei campi, per cui T sarà costruita in questo ambito usando l'analogia classica ed avendo in mente di mantenerla come simmetria conservata.

Vediamo che cosa implica questa richiesta ed iniziamo dal campo scalare.

Ricordiamo a questo proposito che, quando abbiamo studiato T in prima quantizzazione, abbiamo concluso che, nel caso di una particella scalare, i.e. nel caso in cui l'impulso costituisce un insieme completo di osservabili che commutano, allora risulta che

$$T |\vec{p}\rangle = e^{i\eta_T} |-\vec{p}\rangle \quad (\text{C.278})$$

²⁴⁷Il campo elettrico ha origine nelle cariche, che sono assunte scalari sotto T , quindi *non* cambia di segno, a differenza del campo magnetico che ha come sorgenti le correnti, le quali, essendo legate al moto delle cariche, invece, cambiano di segno sotto T . Dunque, ricordando che

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.270})$$

ecco che

$$T : F^{\mu\nu} \rightarrow -F_{\mu\nu} \quad (\text{C.271})$$

ma poiché chiaramente risulta

$$T : \partial_\mu \rightarrow -\partial'^\mu \quad (\text{C.272})$$

visto che, per definizione

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{C.273})$$

ecco che deve valere appunto la relazione

$$T : A^\mu \rightarrow A_\mu \quad (\text{C.274})$$

e questo può essere tradotto, per quanto riguarda l'azione di T sugli operatori di creazione di particella ed antiparticella, nella relazione²⁴⁸

$$T a^\dagger(\vec{p}) T^{-1} = e^{i\eta_T} a^\dagger(-\vec{p}) \quad (\text{C.279})$$

$$T b^\dagger(\vec{p}) T^{-1} = e^{-i\eta_T} b^\dagger(-\vec{p}) \quad (\text{C.280})$$

e quindi²⁴⁹ per gli operatori di distruzione avremo altresì

$$T a(\vec{p}) T^{-1} = e^{-i\eta_T} a(-\vec{p}) \quad (\text{C.287})$$

$$T b(\vec{p}) T^{-1} = e^{i\eta_T} b(-\vec{p}) \quad (\text{C.288})$$

Si osservi che le leggi di trasformazione (C.279)-(C.280) e (C.287)-(C.288) sono formalmente le stesse che nel caso della parità P , quindi²⁵⁰ l'operatore T è compatibile con l'algebra del campo scalare, così come sappiamo che lo è l'operatore di parità P .

Vuol dire questo che T e P coincidono nel caso del campo scalare ? No !

La ragione è che la trasformazione P è unitaria mentre T è antiunitaria.

Vediamo dunque che cosa consegue da questo fatto, per esempio, per quanto

²⁴⁸Il fatto che per particella ed antiparticella la fase sia opposta discende, di nuovo, dal fatto che, solo in questo modo si può dedurre una legge di trasformazione semplice per il campo scalare ϕ (dato che nella sua decomposizione spettrale compaiono a e b^\dagger) e per il suo aggiunto ϕ^\dagger .

²⁴⁹Se prendiamo, infatti, l'aggiunto di entrambi i membri delle (C.279) e (C.280), otteniamo

$$(T^{-1})^\dagger a(\vec{p}) T^\dagger = e^{-i\eta_T} a(-\vec{p}) \quad (\text{C.281})$$

$$(T^{-1})^\dagger b(\vec{p}) T^\dagger = e^{i\eta_T} b(-\vec{p}) \quad (\text{C.282})$$

e se T fosse unitario, non avremmo esitazioni ... ma è antiunitario: quanto vale, allora $(T^{-1})^\dagger$? Ricordiamo che, per un operatore antiunitario A , dati comunque i vettori $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ risulta

$$\langle A\phi | \psi \rangle \equiv \langle \phi | A^\dagger \psi \rangle^* \quad (\text{C.283})$$

quindi, nel caso di T^{-1} , si ha

$$\langle T^{-1} \phi | \psi \rangle = \langle \phi | (T^{-1})^\dagger \psi \rangle^* \quad (\text{C.284})$$

ma

$$\langle T^{-1} \phi | \psi \rangle = \langle T^{-1} \phi | T^{-1} T \psi \rangle = \langle \phi | T \psi \rangle^* \quad (\text{C.285})$$

e dunque, per l'arbitrarietà di $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$, confrontando la (C.284) con la (C.285). si conclude che è ancora

$$(T^{-1})^\dagger = T \quad (\text{C.286})$$

²⁵⁰In realtà questa conclusione è meno ovvia di quanto possa sembrare ... come vedremo tra breve.

riguarda la legge di trasformazione del campo stesso.
Ripartendo dal ben noto sviluppo

$$\phi(x^0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ a(\vec{p}) e^{-ip^0x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ip^0x^0-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right\} \quad (\text{C.289})$$

ed usando la (C.287) e la (C.280), nonché tenendo conto del carattere antiunitario di T , abbiamo

$$T \phi(x^0, \vec{x}) T^{-1} = e^{-i\eta_T} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ a(-\vec{p}) e^{ip^0x^0-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(-\vec{p}) e^{-ip^0x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right\} \quad (\text{C.290})$$

Cambiando variabile di integrazione, i.e. ponendo $\vec{q} = -\vec{p}$, si ha allora che ($p^0 = q^0$!)

$$\begin{aligned} T \phi(x^0, \vec{x}) T^{-1} &= e^{-i\eta_T} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left\{ a(\vec{q}) e^{-iq^0(-x^0)+i\vec{q}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(\vec{q}) e^{iq^0(-x^0)-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right\} = \\ &= e^{-i\eta_T} \phi(-x^0, \vec{x}) \equiv e^{-i\eta_T} \phi(Tx) \end{aligned} \quad (\text{C.291})$$

dove si è posto²⁵¹, per comodità di notazione ed in analogia con quanto già fatto per la parità,

$$Tx \equiv T(x^0, \vec{x}) = (-x^0, \vec{x}) \quad (\text{C.292})$$

Analogamente poi per ϕ^\dagger risulta

$$T \phi^\dagger(x^0, \vec{x}) T^{-1} = e^{i\eta_T} \phi^\dagger(-x^0, \vec{x}) \equiv e^{i\eta_T} \phi^\dagger(Tx) \quad (\text{C.293})$$

e questi risultati, evidentemente, sono in perfetto accordo con quanto potevamo attenderci sulla base dell'analogia classica !

A questo punto, è opportuno tornare sulla questione della compatibilità della trasformazione con le regole di commutazione, che abbiamo prima accertato sulla base dell'identità formale con quelle per la parità.

Bisogna ricordare che T , a differenza di P , è antiunitario: la conclusione tratta sulla base dell'analogia con P risulta corretta solo perché i commutatori²⁵² fra gli operatori di creazione e distruzione sono comunque reali !

Veniamo adesso al problema di vedere se T è una simmetria conservata nel caso del campo scalare libero.

²⁵¹E' evidente che la matrice T che descrive l'azione della trasformazione sul quadrivettore x è semplicemente l'opposto del tensore metrico g .

²⁵²Abbiamo visto che, per il campo scalare, le regole di commutazione canoniche si traducono nella relazione

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = i \Delta(x - y; m) \quad (\text{C.294})$$

dove

$$i \Delta(x) \equiv \frac{1}{(2\pi^3)} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{iqx} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] \quad (\text{C.295})$$

La trasformazione è tale per cui

$$T : \quad x \rightarrow x' = Tx \quad \Leftrightarrow \quad x = Tx' \quad (\text{C.304})$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi_T(x') = e^{-i\eta_T} \phi(x) \Leftrightarrow \phi(x) = e^{i\eta_T} \phi_T(x') \quad (\text{C.305})$$

$$\phi^\dagger(x) \rightarrow \phi_T^\dagger(x') = e^{i\eta_T} \phi^\dagger(x) \Leftrightarrow \phi^\dagger(x) = e^{-i\eta_T} \phi_T^\dagger(x') \quad (\text{C.306})$$

Sotto T , per quanto visto sopra, abbiamo

$$T [\phi(x), \phi^\dagger(y)] T^{-1} = [\phi(Tx), \phi^\dagger(Ty)] \quad (\text{C.296})$$

quindi, la compatibilità di T con le regole di commutazione del campo si traduce nel fatto che deve risultare

$$T i\Delta(x; m) T^{-1} = i\Delta(Tx; m) \quad (\text{C.297})$$

ovvero che la quantità (si ricordi che T è antiunitario)

$$\frac{1}{(2\pi^3)} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{-iqx} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] \quad (\text{C.298})$$

deve essere uguale alla quantità

$$\frac{1}{(2\pi^3)} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{iq(Tx)} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] \quad (\text{C.299})$$

Quanto alla prima quantità (C.298), si ha

$$\frac{1}{(2\pi^3)} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{-iqx} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] = i\Delta(-x; m) \quad (\text{C.300})$$

e poiché la funzione Δ è dispari, abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi^3)} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{-iqx} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] = i\Delta(-x; m) = \\ & = -i\Delta(x; m) = -\frac{1}{(2\pi^3)} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{iqx} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] \end{aligned} \quad (\text{C.301})$$

Veniamo ora alla seconda quantità (C.299). Poiché risulta evidentemente che

$$q(Tx) = (Tq)x \quad (\text{C.302})$$

ecco che, ponendo $p = Tq \Rightarrow p^0 = -q^0$, abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi^3)} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{iq(Tx)} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] = \\ & \frac{1}{(2\pi^3)} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) e^{i(Tq)x} [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] = \\ & \frac{1}{(2\pi^3)} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) e^{ipx} [\Theta(-p^0) - \Theta(p^0)] = -i\Delta(x; m) \end{aligned} \quad (\text{C.303})$$

per cui resta dimostrato che la (C.298) e la (C.299) coincidono e dunque è così dimostrato in modo diretto che la trasformazione di inversione temporale T è compatibile con l'algebra del campo. Si osservi ancora una volta che, per giungere a questa conclusione, è stato necessario usare il fatto che T è antiunitario.

Quanto alla densità lagrangiana, l'invarianza in valore ci garantisce che, essendo quella del campo scalare libero data da

$$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^\dagger(x)) - m^2 \phi(x) \phi^\dagger(x) \quad (\text{C.307})$$

risulta (i fattori di fase, evidentemente, si compensano ...)

$$\mathcal{L}_T(x') = (\partial_\mu \phi_T(x')) (\partial^\mu \phi_T^\dagger(x')) - m^2 \phi_T(x') \phi_T^\dagger(x') \quad (\text{C.308})$$

D'altronde, evidentemente è

$$T : \quad \partial_\mu \rightarrow -\partial'^\mu \quad (\text{C.309})$$

per cui abbiamo infine che

$$\mathcal{L}_T(x') = (\partial'^\mu \phi_T(x')) (\partial'_\mu \phi_T^\dagger(x')) - m^2 \phi_T(x') \phi_T^\dagger(x') \quad (\text{C.310})$$

ovvero la densità lagrangiana è invariante in forma sotto T e dunque ϕ e ϕ_T hanno la stessa dinamica, per cui T , che abbiamo già visto essere compatibile con l'algebra del campo, risulta essere una simmetria esatta per il campo scalare libero.

Che succede, ora, nel caso in cui la corrente associata al campo scalare interagisca con il campo elettromagnetico ?
Abbiamo già detto che T resterà una simmetria conservata se e solo se

$$T J^\mu(x) T^{-1} = J_\mu(Tx) \equiv J_\mu(x') \quad (\text{C.311})$$

Ma la densità di corrente associata al campo scalare carico è dato da

$$J^\mu(x) = i e \left[\phi^\dagger(x) (\partial^\mu \phi(x)) - (\partial^\mu \phi^\dagger(x)) \phi(x) \right] \quad (\text{C.312})$$

e in base a quanto detto sopra, abbiamo (di nuovo, i fattori di fase si compensano)

$$\begin{aligned} T J^\mu(x) T^{-1} &= -i e T \left[\phi^\dagger(x) (\partial^\mu \phi(x)) - (\partial^\mu \phi^\dagger(x)) \phi(x) \right] T^{-1} = \\ &= -i e \left[T \phi^\dagger(x) T^{-1} (\partial^\mu T \phi(x) T^{-1}) - (\partial^\mu T \phi^\dagger(x) T^{-1}) T \phi(x) T^{-1} \right] = \\ &= -i e \left[\phi^\dagger(Tx) (\partial^\mu \phi(Tx)) - (\partial^\mu \phi^\dagger(Tx)) \phi(Tx) \right] = \\ &= i e \left[\phi^\dagger(x') (\partial'_\mu \phi(x')) - (\partial'_\mu \phi^\dagger(x')) \phi(x') \right] = \\ &= J_\mu(x') \end{aligned} \quad (\text{C.313})$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo fatto uso della (C.309).

Il risultato (C.313) così ottenuto prova quindi che T rimane una simmetria conservata anche nel caso di interazione fra il campo elettromagnetico e una corrente prodotta da un campo scalare carico.

Mostriamo adesso, prima di concludere l'argomento, una differenza interessante

relativa al comportamento sotto inversione temporale della funzione d'onda di una particella scalare e del campo scalare stesso.

Per la funzione d'onda, vedemmo a suo tempo che risulta

$$T : \psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi_T(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, -t) \quad (\text{C.314})$$

mentre per il campo scalare abbiamo visto adesso che risulta, a parte un fattore di fase inessenziale, che

$$T \phi(\vec{x}, t) T^{-1} = \phi_T(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, -t) \quad (\text{C.315})$$

mentre avremmo potuto aspettarci, per analogia, che al secondo membro della (C.315) ci comparisse piuttosto $\phi^\dagger \dots$

Non c'è, naturalmente, nessuna contraddizione.

Per rendersene conto, consideriamo uno stato di singola particella di impulso definito \vec{p} . Esso sarà individuato dal vettore

$$|\vec{p}\rangle = a^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle \equiv |a(\vec{p})\rangle \quad (\text{C.316})$$

Ma qual è la sua funzione d'onda ?

Essa, come sappiamo, è data semplicemente da

$$\psi(\vec{x}, t) = \langle \Omega | \phi(\vec{x}, t) | a(\vec{p}) \rangle \quad (\text{C.317})$$

Consideriamo allora la funzione d'onda dello stato $T | a(\vec{p}) \rangle$: evidentemente avremo

$$\psi_T(\vec{x}, t) = \langle \Omega | \phi(\vec{x}, t) T | a(\vec{p}) \rangle = \langle \Omega | T T^{-1} \phi(\vec{x}, t) T a(\vec{p}) \rangle \quad (\text{C.318})$$

D'altronde, essendo il vuoto T -invariante, abbiamo evidentemente che

$$\psi_T(\vec{x}, t) = \langle T \Omega | T T^{-1} \phi(\vec{x}, t) T a(\vec{p}) \rangle \quad (\text{C.319})$$

ma T è antiunitario, quindi

$$\psi_T(\vec{x}, t) = \langle T \Omega | T T^{-1} \phi(\vec{x}, t) T a(\vec{p}) \rangle = \langle \Omega | T^{-1} \phi(\vec{x}, t) T a(\vec{p}) \rangle^* \quad (\text{C.320})$$

D'altronde si è visto che, a parte una fase inessenziale, risulta

$$T \phi(\vec{x}, t) T^{-1} = \phi(\vec{x}, -t) \quad (\text{C.321})$$

e dunque

$$T^{-1} \phi(\vec{x}, -t) T = \phi(\vec{x}, t) \quad (\text{C.322})$$

ovvero²⁵³

$$T^{-1} \phi(\vec{x}, t) T = \phi(\vec{x}, -t) \quad (\text{C.323})$$

²⁵³Si ricordi, infatti, che, nel caso scalare $T^2 = 1$ e dunque $T = T^{-1}$.

per cui, sostituendo, ecco che risulta

$$\psi_T(\vec{x}, t) = \langle \Omega | \phi(\vec{x}, -t) a(\vec{p}) \rangle^* = \langle \Omega | \phi(\vec{x}, -t) | \vec{p} \rangle^* = \psi^*(\vec{x}, -t) \quad (\text{C.324})$$

in accordo con il risultato ben noto ottenuto nello schema della prima quantizzazione.

Veniamo ora al campo elettromagnetico.

Abbiamo già detto che, in base all'analogia classica, ci aspettiamo che debba essere

$$T : A^\mu(x) \rightarrow A_\mu(Tx) \quad (\text{C.325})$$

Cerchiamo adesso di vedere come questo risultato può essere dimostrato, definendo l'azione di T , al solito, sugli operatori di creazione e distruzione del fotone. Per arrivare a questo, chiediamoci: come potrà agire T , in base al significato che gli diamo, su uno stato di fotone di impulso \vec{p} ed elicità λ ?

Se vogliamo mantenere l'analogia classica, poiché sia l'impulso che il momento angolare si invertono di segno per inversione temporale, dobbiamo concludere che sotto T , l'autovalore dell'impulso spaziale \vec{p} dovrà cambiare di segno, mentre quello dell'elicità λ *non* dovrà farlo, i.e. dovrà essere

$$T | \vec{p}, \lambda \rangle = e^{i\eta_T} | -\vec{p}, \lambda \rangle \quad (\text{C.326})$$

Osserviamo intanto che, per il carattere antiunitario di T , qualunque sia la fase η_T , valendo la (C.326), ne segue che $T^2 = I$, come ci aspettiamo che accada visto che il fotone ha spin intero.

Ma torniamo al nostro problema di definire l'azione di T sul campo elettromagnetico A^μ e proviamo a porre semplicemente

$$T a^\dagger(\vec{p}, \lambda) T^{-1} = e^{i\eta_T} a^\dagger(-\vec{p}, \lambda) \quad (\text{C.327})$$

e dunque, per quanto detto precedentemente, anche

$$T a(\vec{p}, \lambda) T^{-1} = e^{-i\eta_T} a(-\vec{p}, \lambda) \quad (\text{C.328})$$

Risulta allora che, essendo lo sviluppo del campo A^μ dato da

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ a(\vec{p}, \lambda) \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}, \lambda) \epsilon^{*\mu}(\vec{p}, \lambda) e^{ipx} \right\} \quad (\text{C.329})$$

per quanto assunto e per il carattere antiunitario di T , avremo

$$\begin{aligned} T A^\mu(x) T^{-1} &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ T a(\vec{p}, \lambda) T^{-1} \epsilon^{*\mu}(\vec{p}, \lambda) e^{ipx} + \right. \\ &\quad \left. + T a^\dagger(\vec{p}, \lambda) T^{-1} \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} \right\} = \\ &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ e^{-i\eta_T} a(-\vec{p}, \lambda) \epsilon^{*\mu}(\vec{p}, \lambda) e^{ipx} + \right. \\ &\quad \left. + e^{i\eta_T} a^\dagger(-\vec{p}, \lambda) \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} \right\} \end{aligned}$$

Già da questo risultato si vede che, per mantenere il carattere autoaggiunto del campo, in realtà la fase η_T non può che essere nulla²⁵⁴.

Abbiamo quindi, effettuando la sostituzione di variabile $\vec{q} \rightarrow -\vec{p}$, che risulta

$$\begin{aligned} T A^\mu(x) T^{-1} &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \left\{ a(-\vec{p}, \lambda) \epsilon^{*\mu}(\vec{p}, \lambda) e^{ipx} + \right. \\ &\quad \left. + a^\dagger(-\vec{p}, \lambda) \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-ipx} \right\} = \\ &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left\{ a(\vec{q}, \lambda) \epsilon^{*\mu}(-\vec{q}, \lambda) e^{-iq^0(-x^0)+i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \right. \\ &\quad \left. + a^\dagger(\vec{q}, \lambda) \epsilon^\mu(-\vec{q}, \lambda) e^{iq^0(-x^0)-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right\} \end{aligned}$$

Ricordiamo adesso che, per le (C.226) e (C.227), risulta

$$\vec{\epsilon}(-\vec{k}, \pm) = \vec{\epsilon}(\vec{k}, \mp) \quad (\text{C.330})$$

e per la (C.224) e (C.225), che

$$\vec{\epsilon}^*(\vec{k}, \pm) = -\vec{\epsilon}(\vec{k}, \mp) \quad (\text{C.331})$$

per cui

$$\vec{\epsilon}^*(-\vec{k}, \pm) = \vec{\epsilon}^*(\vec{k}, \mp) = -\vec{\epsilon}(\vec{k}, \pm) \quad (\text{C.332})$$

Poiché $\epsilon^0 \equiv 0$, possiamo allora scrivere che

$$\begin{aligned} T \vec{A}(x^0, \vec{x}) T^{-1} &= - \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left\{ a(\vec{q}, \lambda) \vec{\epsilon}(\vec{q}, \lambda) e^{-iq^0(-x^0)+i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \right. \\ &\quad \left. + a^\dagger(\vec{q}, \lambda) \vec{\epsilon}^*(\vec{q}, \lambda) e^{iq^0(-x^0)-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right\} = -\vec{A}(-x^0, \vec{x}) \quad (\text{C.333}) \end{aligned}$$

e siccome siamo nella gauge di radiazione, questo implica proprio che

$$T A^\mu(x) T^{-1} = A_\mu(Tx) \quad (\text{C.334})$$

E' evidente adesso che questa legge di trasformazione la quale, ripetiamolo, sugli operatori di creazione e distruzione del fotone assume la forma seguente

$$T a^\dagger(\vec{p}, \lambda) T^{-1} = a^\dagger(-\vec{p}, \lambda) \quad (\text{C.335})$$

$$T a(\vec{p}, \lambda) T^{-1} = a(-\vec{p}, \lambda) \quad (\text{C.336})$$

è compatibile con le regole di commutazione del campo elettromagnetico.

Questo segue infatti dal fatto che l'unico commutatore non nullo è quello fra gli operatori di distruzione e di creazione e vale

$$[a(\vec{p}, \lambda), a^\dagger(\vec{q}, \mu)] = 2E_p (2\pi)^3 \delta_{\lambda\mu} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \quad (\text{C.337})$$

²⁵⁴In realtà dal solo carattere autoaggiunto del campo possiamo concludere solo che $e^{i\eta_T} = \pm 1$. Il segno negativo viene escluso proprio dalla richiesta che il campo si trasformi sotto T come quello classico, i.e. che valga la (C.325).

il quale è reale (dunque il carattere antiunitario di T non comporta conseguenze) ed è pari in $\vec{p} - \vec{q}$.

E' altresì semplice capire che le equazioni del moto del campo T -trasformato coincidono con quelle del campo di partenza A_μ , infatti esse sono

$$\square A_\mu \equiv \partial_\nu \partial^\nu A_\mu = 0; \quad \partial^\mu A_\mu = 0 \quad (\text{C.338})$$

ma sotto T abbiamo visto che accade semplicemente che

$$\partial^\mu \rightarrow -\partial'_\mu; \quad A^\mu(x) \rightarrow A_\mu(Tx) \equiv A_\mu(x') \quad (\text{C.339})$$

per cui, evidentemente, entrambe le equazioni (C.338) restano della stessa forma²⁵⁵, ovvero l'operatore T che abbiamo definito sopra risulta essere una simmetria conservata per il campo elettromagnetico libero.

Veniamo infine all'ultimo campo interessante da considerare per quanto riguarda la simmetria di inversione temporale T , cioè al campo di Dirac.

A questo proposito, vale ancora una volta l'osservazione già fatta precedentemente per le simmetrie P e C , cioè che se vogliamo che T possa essere una simmetria conservata anche nel caso dell'interazione elettromagnetica, visto il modo di trasformarsi sotto T del campo A_μ , poiché la corrente elettrica associata al campo di Dirac carico è data da

$$J^\mu(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (\text{C.340})$$

occorre che i campi ψ e $\bar{\psi}$ si trasformino sotto T in modo tale per cui accada che

$$T J^\mu(x) T^{-1} = J_\mu(Tx) \quad (\text{C.341})$$

Questa è una esigenza imprescindibile, se vogliamo che l'elettrodinamica quantistica, così come nel caso classico, risulti T invariante.

Al solito, per arrivare a vedere come T agisce sui campi ψ e $\bar{\psi}$, partiamo dagli operatori di creazione e distruzione di particella e antiparticella.

La prima osservazione che dobbiamo fare è che, sempre affinché l'analogia classica sia rispettata, sotto T ci attendiamo che l'impulso \vec{p} e la componente z dello spin s si invertano di segno, sia che si tratti di particella o che si tratti di antiparticella, i.e.

$$T |a(\vec{p}, s) > \propto |a(-\vec{p}, -s) > \quad (\text{C.342})$$

$$T |b(\vec{p}, s) > \propto |b(-\vec{p}, -s) > \quad (\text{C.343})$$

Più precisamente, per le considerazioni già fatte sull'operatore T quando lo abbiamo studiato nello schema di prima quantizzazione, sappiamo che, per quanto

²⁵⁵Si poteva, naturalmente, procedere di nuovo dalla densità lagrangiana ...

riguarda la variabile di spin, oltre al suo rovesciamento è coinvolta una rotazione di π intorno all'asse J_y , i.e.

$$T |\vec{p}, s\rangle = R_{-ss} e^{i\eta_T} |-\vec{p}, -s\rangle \quad (\text{C.344})$$

dove il fattore di fase $e^{i\eta_T}$ è a priori qualsiasi e

$$R \equiv e^{i\pi J_y} \quad (\text{C.345})$$

Dunque, se usiamo la base consueta degli autovettori di σ_z , risulta ($\hbar = 1$)

$$J_y = \frac{1}{2} \sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow i\pi J_y = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\pi}{2} U \quad (\text{C.346})$$

e quindi

$$\begin{aligned} R &= e^{i\pi J_y} = e^{\frac{\pi}{2} U} = I + \frac{\pi}{2} U + \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 U^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 U^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 U^4 + \dots = \\ &= I + \frac{\pi}{2} U - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 I - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 U + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 I + \dots = \\ &= I \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + U \sin\frac{\pi}{2} = U \end{aligned} \quad (\text{C.347})$$

Dunque abbiamo²⁵⁶

$$T |\vec{p}, +\rangle = e^{i\eta_T} |-\vec{p}, -\rangle \quad (\text{C.348})$$

$$T |\vec{p}, -\rangle = -e^{i\eta_T} |-\vec{p}, +\rangle \quad (\text{C.349})$$

Proviamo adesso, in analogia con quanto già fatto per gli operatori C e P , a tradurre tutto questo nel linguaggio degli operatori di creazione e distruzione. Tentativamente poniamo dunque

$$T a^\dagger(\vec{p}, s) T^{-1} = e^{i\eta_T} R_{-ss} a^\dagger(-\vec{p}, -s) \equiv e^{i\eta_T} f_s a^\dagger(-\vec{p}, -s) \quad (\text{C.350})$$

$$T b^\dagger(\vec{p}, s) T^{-1} = e^{-i\eta_T} R_{-ss} b^\dagger(-\vec{p}, -s) \equiv e^{-i\eta_T} f_s b^\dagger(-\vec{p}, -s) \quad (\text{C.351})$$

dove, in base a quanto visto precedentemente²⁵⁷, è

$$f_+ \equiv R_{-+} = +1; \quad f_- \equiv R_{+-} = -1 \quad (\text{C.352})$$

e si è posto, per comodità di notazioni,

$$a^\dagger(\vec{p}, +1) \equiv a^{\dagger(1)}(\vec{p}); \quad a^\dagger(\vec{p}, -1) \equiv a^{\dagger(2)}(\vec{p}) \quad (\text{C.353})$$

$$b^\dagger(\vec{p}, +1) \equiv b^{\dagger(1)}(\vec{p}); \quad b^\dagger(\vec{p}, -1) \equiv b^{\dagger(2)}(\vec{p}) \quad (\text{C.354})$$

²⁵⁶Si noti che $R^2 = U^2 = -I$, in accordo con il fatto che per particelle di spin 1/2, come abbiamo già visto, $T^2 = -I$...

²⁵⁷Usiamo qui il simbolo s per indicare l'autovalore della componente z dello spin della particella/antiparticella modulo $\hbar/2$, per cui $s = \pm 1$.

Prendendo adesso l'aggiunto delle (C.350)-(C.351), poiché R è reale, abbiamo che, per gli operatori di annichilazione, dovrà essere quindi

$$T a(\vec{p}, s) T^{-1} = e^{-i\eta_T} R_{-ss} a(-\vec{p}, -s) \equiv e^{-i\eta_T} f_s a(-\vec{p}, -s) \quad (\text{C.355})$$

$$T b(\vec{p}, s) T^{-1} = e^{i\eta_T} R_{-ss} b(-\vec{p}, -s) \equiv e^{i\eta_T} f_s b(-\vec{p}, -s) \quad (\text{C.356})$$

A questo punto, domandiamoci: queste leggi di trasformazione sono o no compatibili con l'algebra dei campi ?

Ricordiamo a questo proposito che gli unici anticommutatori non nulli sono

$$\{a(\vec{p}, s), a^\dagger(\vec{q}, s')\} = \{b(\vec{p}, s), b^\dagger(\vec{q}, s')\} = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ss'} \quad (\text{C.357})$$

Visto che T agisce allo stesso modo sugli operatori di particella e antiparticella, limitiamoci a vedere se T rispetta l'algebra costruita con gli operatori di creazione e annichilazione della particella.

Evidentemente l'algebra sarà rispettata se e solo se

$$T \{a(\vec{p}, s), a^\dagger(\vec{q}, s')\} T^{-1} = T 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ss'} T^{-1} \quad (\text{C.358})$$

ovvero, essendo il secondo membro della (C.358) reale, se accade che

$$T \{a(\vec{p}, s), a^\dagger(\vec{q}, s')\} T^{-1} = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ss'} \quad (\text{C.359})$$

D'altronde

$$\begin{aligned} T \{a(\vec{p}, s), a^\dagger(\vec{q}, s')\} T^{-1} &= \{T a(\vec{p}, s) T^{-1}, T a^\dagger(\vec{q}, s') T^{-1}\} = \\ &= \{e^{-i\eta_T} R_{-ss} a(-\vec{p}, -s), e^{i\eta_T} R_{-s's'} a^\dagger(-\vec{q}, -s')\} = \\ &= R_{-ss} R_{-s's'} 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ss'} \end{aligned} \quad (\text{C.360})$$

dove si è usato il fatto che

$$\delta_{-s-s'} = \delta_{ss'} \quad e \quad che \quad \delta^3(-\vec{v}) = \delta^3(\vec{v})$$

Rispetto al secondo membro della (C.359), abbiamo formalmente in più il fattore $R_{-ss} R_{-s's'}$ che, però, vista la presenza della $\delta_{ss'}$, vale comunque sempre e soltanto +1, nei casi in cui l'anticommutatore è non nullo.

Resta così dimostrato che c'è, effettivamente, compatibilità fra la definizione data di T e l'algebra delle osservabili del campo di Dirac.

Veniamo ora all'azione esplicita della trasformazione di inversione temporale T sui campi ψ e $\bar{\psi}$. Siccome T si limita ad agire sugli autovalori degli autostati di impulso e spin (componente z), ma non tocca le condizioni di particella/antiparticella, allora così come nel caso della parità, ci attendiamo che mandi ψ in sé, i.e. che risulti

$$T : \quad \psi(x) \rightarrow e^{-i\eta_T} M \gamma^0 \psi(Tx) \quad (\text{C.361})$$

e dunque che²⁵⁸ sia

$$T : \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{i\eta_T} \bar{\psi}(Tx) M^+ \gamma^0 \quad (\text{C.364})$$

dove M è una matrice 4×4 la quale, se vogliamo che valga la relazione per noi imprescindibile che

$$T J^\mu(x) T^{-1} = J_\mu(Tx) \quad (\text{C.365})$$

deve essere tale per cui

$$M^+ \gamma^0 \gamma^{*\mu} M \gamma^0 = \gamma_\mu \quad (\text{C.366})$$

Infatti (ricordiamoci che T è antilineare ...)

$$\begin{aligned} T \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) T^{-1} &= T \bar{\psi}(x) T^{-1} T \gamma^\mu T^{-1} T \psi(x) T^{-1} = \\ &= e^{i\eta_T} \bar{\psi}(Tx) M^+ \gamma^0 \gamma^{*\mu} M \gamma^0 \psi(Tx) e^{-i\eta_T} \end{aligned} \quad (\text{C.367})$$

ed affinché valga la (C.365) è necessario, appunto, che sia

$$M^+ \gamma^0 \gamma^{*\mu} M \gamma^0 = \gamma_\mu \quad (\text{C.368})$$

Vediamo allora se una tale matrice esiste.

Iniziamo facendo $\mu = 0$: poiché $\gamma^0 = \gamma^{*0} = \gamma_0$ e $(\gamma^0)^2 = (\gamma_0)^2 = I$, ne segue che, affinché possa valere la (C.368), è necessario che

$$M^+ M = I \quad (\text{C.369})$$

ovvero che M sia unitaria. Usando allora questo fatto nella (C.368) unitamente al fatto che $(\gamma^0)^2 = I$, abbiamo

$$\gamma^0 \gamma^{*\mu} M = M \gamma_\mu \gamma^0 \quad (\text{C.370})$$

Il caso $\mu = 0$, ovviamente, è automaticamente soddisfatto, essendo quello che ci ha condotto alla condizione di unitarietà di M , usata appunto per passare dalla (C.368) alla (C.370). Nel caso in cui $\mu = 1$, essendo γ^1 reale ed essendo $\gamma^1 = -\gamma_1$, abbiamo

$$\mu = 1 : \quad \gamma^0 \gamma^1 M = -M \gamma^1 \gamma^0 \quad (\text{C.371})$$

²⁵⁸Infatti se vale la (C.361) allora, essendo $\gamma^0 = \gamma^{0+}$, segue che

$$T : \quad \psi^+(x) \rightarrow \psi^+(Tx) \gamma^0 M^+ = \bar{\psi}(Tx) M^+ \quad (\text{C.362})$$

e dunque

$$T : \quad \bar{\psi}(x) \equiv \psi^+(x) \gamma^0 \rightarrow \bar{\psi}(Tx) M^+ \gamma^0 \quad (\text{C.363})$$

mentre nel caso in cui $\mu = 2$, siccome γ^2 è immaginaria pura, risulta

$$\mu = 2 : \quad -\gamma^0 \gamma^2 M = -M \gamma^2 \gamma^0 \quad (\text{C.372})$$

Infine, nel caso in cui $\mu = 3$, poiché siamo di nuovo nella stessa situazione che nel caso in cui $\mu = 1$, abbiamo

$$\mu = 3 : \quad \gamma^0 \gamma^3 M = -M \gamma^3 \gamma^0 \quad (\text{C.373})$$

Siccome γ^0 anticommuta con tutte le γ^i , le relazioni di sopra divengono le seguenti

$$\gamma^0 \gamma^1 M = M \gamma^0 \gamma^1 \quad (\text{C.374})$$

$$\gamma^0 \gamma^2 M = -M \gamma^0 \gamma^2 \quad (\text{C.375})$$

$$\gamma^0 \gamma^3 M = M \gamma^0 \gamma^3 \quad (\text{C.376})$$

cioè M commuta con $\gamma^0 \gamma^1$ e $\gamma^0 \gamma^3$ mentre anticommuta con $\gamma^0 \gamma^2$.

La soluzione è la matrice seguente

$$M = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \quad (\text{C.377})$$

infatti (ricordiamo che $\gamma^i \gamma^i = -I$, qualunque sia i)

$$\begin{aligned} \mu = 1 : \\ I & : \gamma^0 \gamma^1 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^3 \gamma^0 = \gamma^3 \\ II & : \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^1 = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^1 = -(\gamma^1)^2 \gamma^3 = \gamma^3 \end{aligned} \quad (\text{C.378})$$

$$\begin{aligned} \mu = 2 : \\ I & : \gamma^0 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 = -\gamma^2 \gamma^1 \gamma^3 (\gamma^0)^2 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \\ II & : -\gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^2 = -\gamma^1 \gamma^3 \gamma^2 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \end{aligned} \quad (\text{C.379})$$

$$\begin{aligned} \mu = 3 : \\ I & : \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^1 (\gamma^3)^2 \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^0 = -\gamma^1 \\ II & : \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^3 = \gamma^1 (\gamma^3)^2 = -\gamma^1 \end{aligned} \quad (\text{C.380})$$

Verifichiamo adesso che M è effettivamente unitaria. Osserviamo a questo proposito che

$$M^+ = (\gamma^1 \gamma^3 \gamma^0)^+ = (\gamma^0)^+ (\gamma^3)^+ (\gamma^1)^+ = \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 \quad (\text{C.381})$$

dove si è usato il fatto che γ^0 è hermitiana mentre le γ^i sono antiermitiane. Risulta quindi

$$M M^+ = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 = \gamma^1 (\gamma^3)^2 \gamma^1 = -(\gamma^1)^2 = I \quad (\text{C.382})$$

Infine, poiché nelle (C.361) e (C.364) compaiono, rispettivamente, le combinazioni $M \gamma^0$ e $M^+ \gamma^0$, calcoliamo direttamente queste matrici: si ha

$$M \gamma^0 = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^1 \gamma^3 \quad (\text{C.383})$$

$$M^+ \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 \gamma^0 = \gamma^3 \gamma^1 \quad (\text{C.384})$$

Tornando quindi all'azione di T sui campi ψ e $\bar{\psi}$, abbiamo dunque trovato che se essa è tale per cui

$$T : \quad \psi(x) \rightarrow e^{-i\eta T} \gamma^1 \gamma^3 \psi(Tx) \quad (\text{C.385})$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{i\eta T} \bar{\psi}(Tx) \gamma^3 \gamma^1 \quad (\text{C.386})$$

allora vale la condizione (C.341) e dunque è possibile che T risulti una simmetria conservata anche nel caso dell'interazione elettromagnetica in cui la corrente è quella associata ad un campo di Dirac carico.

D'altronde, noi l'azione di T però l'abbiamo tentativamente già definita sugli operatori di creazione e distruzione attraverso le (C.350)-(C.351) e (C.355)-(C.356). Queste definizioni portano o no alle (C.385)-(C.386) ? Vediamo.

Iniziando dal campo ψ , abbiamo

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \left\{ a^{(r)}(\vec{p}) u^{(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p}) v^{(r)}(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad (\text{C.387})$$

dunque, tenendo conto che T è un operatore antilineare, è

$$\begin{aligned} T \psi(x) T^{-1} &= \\ &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \left\{ T a^{(r)}(\vec{p}) T^{-1} u^{*(r)}(\vec{p}) e^{ipx} + T b^{\dagger(r)}(\vec{p}) T^{-1} v^{*(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.388})$$

Ovvero, usando la (C.355) e la (C.351) e definendo, per quanto riguarda gli indici di spin, \bar{r} nel modo seguente

$$\bar{1} = 2; \quad \bar{2} = 1 \quad (\text{C.389})$$

abbiamo

$$\begin{aligned} T \psi(x) T^{-1} &= \sum_r \int \frac{d^3 p}{2E_p (2\pi)^3} \left\{ a^{(\bar{r})}(-\vec{p}) e^{-i\eta T} f_r u^{*(r)}(\vec{p}) e^{ipx} + \right. \\ &\quad \left. + b^{\dagger(\bar{r})}(-\vec{p}) e^{-i\eta T} f_r v^{*(r)}(\vec{p}) e^{-ipx} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.390})$$

Cambiando ora variabili, i.e. ponendo

$$\vec{q} = -\vec{p}; \quad s = \bar{r} \Leftrightarrow r = \bar{s} \quad (\text{C.391})$$

otteniamo

$$\begin{aligned} T \psi(x) T^{-1} &= e^{-i\eta T} \sum_s \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left\{ a^{(s)}(\vec{q}) f_{\bar{s}} u^{*(\bar{s})}(-\vec{q}) e^{-iq^0(-x^0)+i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \right. \\ &\quad \left. + b^{\dagger(s)}(\vec{q}) f_{\bar{s}} v^{*(\bar{s})}(-\vec{q}) e^{iq^0(-x^0)-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.392})$$

Consideriamo dunque la quantità²⁵⁹

$$f_{\bar{s}} u^{*(\bar{s})}(-\vec{q}) \quad (\text{C.398})$$

vogliamo dimostrare che risulta

$$f_{\bar{s}} u^{*(\bar{s})}(-\vec{q}) = \gamma^1 \gamma^3 u^{(s)}(\vec{q}) \quad (\text{C.399})$$

Infatti, dalla definizione, si ha

$$u^{(r)}(\vec{q}) = \frac{m + q_\mu \gamma^\mu}{\sqrt{m + E_q}} u_0^{(r)} \quad (\text{C.400})$$

D'altronde, per la (C.370) e la (C.377), risulta

$$\gamma^0 \gamma^{*\mu} \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 \quad (\text{C.401})$$

quindi, moltiplicando a sinistra la (C.400) per $\gamma^1 \gamma^3$, si ha

$$\gamma^1 \gamma^3 u^{(r)}(\vec{q}) = \gamma^1 \gamma^3 \frac{m + q_\mu \gamma^\mu}{\sqrt{m + E_q}} u_0^{(r)} = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \frac{\gamma^0(m + q_\mu \gamma^\mu)}{\sqrt{m + E_q}} u_0^{(r)} \quad (\text{C.402})$$

ma $\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma_\mu$, dunque risulta

$$\begin{aligned} \gamma^1 \gamma^3 u^{(r)}(\vec{q}) &= \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \frac{m + q_\mu \gamma^\mu}{\sqrt{m + E_q}} \gamma^0 u_0^{(r)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m + E_q}} \left(\gamma^1 \gamma^3 m + q_\mu \gamma^0 \gamma^{*\mu} \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \right) u_0^{(r)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m + E_q}} \left(\gamma^1 \gamma^3 m + q_\mu \gamma_\mu^* \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \right) u_0^{(r)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m + E_q}} \left(m + q_\mu \gamma_\mu^* \right) \gamma^1 \gamma^3 u_0^{(r)} \end{aligned} \quad (\text{C.403})$$

²⁵⁹Come sappiamo, le polarizzazioni individuate da $r = 1, 2$ si riferiscono, rispettivamente, agli autostati di s_z per gli autovalori $+1/2$ e $-1/2$, per cui, da quanto precede, risulta che, essendo

$$f_2 = f_1 = f_+ = +1; \quad f_{\bar{1}} = f_2 = f_- = -1 \quad (\text{C.393})$$

si ha

$$s = 1 \Leftrightarrow \bar{s} = 2 : \quad f_{\bar{1}} u^{*(\bar{1})}(-\vec{q}) = -u^{*(2)}(-\vec{q}) \quad (\text{C.394})$$

$$f_{\bar{1}} v^{*(\bar{1})}(-\vec{q}) = -v^{*(2)}(-\vec{q}) \quad (\text{C.395})$$

$$s = 2 \Leftrightarrow \bar{s} = 1 : \quad f_2 u^{*(2)}(-\vec{q}) = +u^{*(1)}(-\vec{q}) \quad (\text{C.396})$$

$$f_2 v^{*(2)}(-\vec{q}) = +v^{*(1)}(-\vec{q}) \quad (\text{C.397})$$

dove si è usato il fatto che $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 = \gamma^1 \gamma^3$.

Osserviamo adesso che la matrice $\gamma^1 \gamma^3$ è tale per cui

$$\begin{aligned} \gamma^1 \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \sigma_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.404})$$

Quindi

$$\gamma^1 \gamma^3 u_0^{(1)} = -u_0^{(2)} \quad (\text{C.405})$$

$$\gamma^1 \gamma^3 u_0^{(2)} = u_0^{(1)} \quad (\text{C.406})$$

e dunque

$$\begin{aligned} \gamma^1 \gamma^3 u^{(1)}(\vec{q}) &= \frac{1}{\sqrt{m + E_q}} (m + q_0 \gamma^{*0} + \vec{q} \cdot \vec{\gamma}^*) (-) u_0^{(2)} = \\ &= -u^{*(2)}(-\vec{q}) = f_{\bar{1}} u^{*(\bar{1})}(-\vec{q}) \end{aligned} \quad (\text{C.407})$$

mentre

$$\gamma^1 \gamma^3 u^{(2)}(\vec{q}) = u^{*(1)}(-\vec{q}) = f_{\bar{2}} u^{*(\bar{2})}(-\vec{q}) \quad (\text{C.408})$$

che provano appunto la (C.399).

Per quanto, poi, riguarda gli spinori v , anche per essi risulta

$$f_{\bar{r}} v^{*(\bar{r})}(-\vec{q}) = \gamma^1 \gamma^3 v^{(r)}(\vec{q}) \quad (\text{C.409})$$

Per dimostrarlo, partiamo di nuovo dalla definizione, i.e. dalla equazione

$$v^{(r)}(\vec{q}) = \frac{m - q_\mu \gamma^\mu}{m + E_q} v_0^{(r)} \quad (\text{C.410})$$

Ripetendo la dimostrazione già fatta per gli spinori u , concludiamo che

$$\gamma^1 \gamma^3 v^{(r)}(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{m + E_q}} (m - q_\mu \gamma_\mu^*) \gamma^1 \gamma^3 v_0^{(r)} \quad (\text{C.411})$$

ed anche stavolta accade che²⁶⁰

$$\gamma^1 \gamma^3 v_0^{(1)} = -v_0^{(2)} \quad (\text{C.413})$$

$$\gamma^1 \gamma^3 v_0^{(2)} = v_0^{(1)} \quad (\text{C.414})$$

²⁶⁰Si ricordi che

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad v_0^{(2)} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.412})$$

per cui risulta

$$\begin{aligned}\gamma^1 \gamma^3 v^{(1)}(\vec{q}) &= \frac{1}{\sqrt{m + E_q}} \left(m - q_0 \gamma^{*0} - \vec{q} \cdot \vec{\gamma}^* \right) (-) v_0^{(2)} = \\ &= -v^{*(2)}(-\vec{q}) = f_1 v^{*(1)}(-\vec{q})\end{aligned}\quad (\text{C.415})$$

$$\gamma^1 \gamma^3 v^{(2)}(\vec{q}) = v^{*(1)}(-\vec{q}) = f_2 v^{*(2)}(-\vec{q}) \quad (\text{C.416})$$

che provano la (C.409). Sostituendo allora la (C.399) e la (C.409) nella (C.390), si ha finalmente che

$$\begin{aligned}T \psi(x^0, \vec{x}) T^{-1} &= e^{-i\eta T} \sum_r \int \frac{d^3 q}{2E_q (2\pi)^3} \left\{ a^{(r)}(\vec{q}) \gamma^1 \gamma^3 u^{(r)}(\vec{q}) e^{-iq^0(-x^0) + i\vec{q} \cdot \vec{x}} + \right. \\ &+ \left. b^{\dagger(r)}(\vec{q}) \gamma^1 \gamma^3 v^{(r)}(\vec{q}) e^{-iq^0(x^0) - i\vec{q} \cdot \vec{x}} \right\} = \\ &= e^{-i\eta T} \gamma^1 \gamma^3 \psi(-x^0, \vec{x})\end{aligned}\quad (\text{C.417})$$

e dunque, per quanto già visto, che

$$T \bar{\psi}(x^0, \vec{x}) T^{-1} = e^{i\eta T} \bar{\psi}(-x^0, \vec{x}) \gamma^3 \gamma^1 \quad (\text{C.418})$$

Resta così dimostrato che l'operatore di inversione temporale T , definito sugli operatori di creazione secondo le (C.350)-(C.351) e su quelli di distruzione attraverso le (C.355)-(C.356), è tale per cui la corrente $J^\mu(x)$ si trasforma sotto T in accordo con la (C.365).

Passiamo infine a dimostrare che T lascia invarianti le equazioni del moto del campo di Dirac libero.

Questo, dato che abbiamo già dimostrato che T è compatibile con l'algebra del campo, garantirà che T è una simmetria conservata per il campo libero.

La regola fin qui usata era quella di riscrivere la densità lagrangiana per i campi trasformati e verificare che essa aveva la stessa forma di quella di partenza. C'è però ora una novità, rappresentata dal carattere antiunitario di T : essa agisce non solo sui campi, ma anche sui coefficienti complessi che possono comparire nella densità lagrangiana !

Ricordiamo che la densità lagrangiana di partenza è

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi \quad (\text{C.419})$$

La trasformazione T , per quanto visto e detto precedentemente, è dunque tale che

$$T : \quad x \equiv (x^0, \vec{x}) \rightarrow Tx \equiv (-x^0, \vec{x}) \Leftrightarrow \partial_\mu = -\partial'^\mu \quad (\text{C.420})$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi_T(x) = \gamma^1 \gamma^3 \psi(Tx) \Leftrightarrow \psi(x) = \gamma^3 \gamma^1 \psi_T(Tx) \quad (\text{C.421})$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}_T(x) = \bar{\psi}(Tx) \gamma^3 \gamma^1 \Leftrightarrow \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_T(Tx) \gamma^1 \gamma^3 \quad (\text{C.422})$$

$$i \rightarrow -i \quad (C.423)$$

$$\gamma^\mu \rightarrow \gamma^{*\mu} \quad (C.424)$$

$$m \rightarrow m \quad (C.425)$$

L'invarianza in valore della densità lagrangiana ci dice quindi che i campi ψ_T e $\bar{\psi}_T$ soddisfano le equazioni del moto che si ottengono dalla densità lagrangiana $\mathcal{L}(x)$, sostituendovi alle quantità non T -trasformate quelle T -trasformate, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T(x') &= -\frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi}_T(x') \gamma^1 \gamma^3 \gamma^{*\mu} [-\partial'^\mu \gamma^3 \gamma^1 \psi_T(x')] - [-\partial'^\mu \bar{\psi}_T(x')] \gamma^1 \gamma^3 \gamma^{*\mu} \gamma^3 \gamma^1 \psi_T(x') \right\} - \\ &- m \bar{\psi}_T(x') \gamma^1 \gamma^3 \gamma^3 \gamma^1 \psi_T(x') \end{aligned} \quad (C.426)$$

Ricordiamo adesso che $(\gamma^0)^2 = -(\gamma^1)^2 = -(\gamma^3)^2 = I$ e che γ^0 anticommuta con γ^1 e γ^3 , per cui, dalla (C.370) e (C.377) abbiamo

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^{*\mu} \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 &= \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 \Rightarrow \gamma^0 \gamma^{*\mu} \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma_\mu \\ \Rightarrow \gamma^{*\mu} \gamma^1 \gamma^3 &= \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma_\mu = \gamma^1 \gamma^3 \gamma_\mu \Rightarrow \gamma^{*\mu} \gamma^3 \gamma^1 = \gamma^3 \gamma^1 \gamma_\mu \\ \Rightarrow \gamma^1 \gamma^3 \gamma^{*\mu} \gamma^3 \gamma^1 &= \gamma_\mu \end{aligned} \quad (C.427)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x') &= \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi}_T(x') \gamma_\mu \left(\partial'^\mu \psi_T(x') \right) - \left(\partial'^\mu \bar{\psi}_T(x') \right) \gamma_\mu \psi_T(x') \right\} - \\ &- m \bar{\psi}_T(x') \psi_T(x') \end{aligned} \quad (C.428)$$

che prova l'invarianza in forma della densità lagrangiana di Dirac sotto T e quindi, finalmente, che T è effettivamente una simmetria conservata per il campo di Dirac libero. Siccome si è visto che, sotto T , la corrente si trasforma in modo che il termine che descrive l'interazione con il campo elettromagnetico sia invariante, i.e.

$$T : J_\mu(x) A^\mu(x) \rightarrow J^\mu(x') A_\mu(x') \quad (C.429)$$

essa è anche una simmetria conservata nel caso di interazione elettromagnetica con la corrente prodotta da un campo spinoriale.